

"POLITEHNICA" UNIVERSITY OF TIMIȘOARA

---

DEPARTMENT OF PHYSICS

P-ța REGINA MARIA 1, 300004 TIMIȘOARA, ROMÂNIA

tel: ++ 40.256.40.30.91 fax: ++ 40.256.40.30.21

e-mail: [fbarvinschi@etv.utt.ro](mailto:fbarvinschi@etv.utt.ro)

<http://www.fizica.utt.ro>

---

Autor: **Florica BARVINSCHI**

**Curs de Fizică generală, in format electronic, pentru învățământul  
tehnic timișorean**



Fotografie realizată de Andreja Pisnik, artist fotograf și Asistent Manager la Editura Elsevier,  
Amsterdam, Olanda, 2004.

## Prefață

Lucrarea de față conține teme legate de programa de fizică pentru studenții din învățământul tehnic, cu precădere pentru cei de la învățământul profilelor electrice (Electronică și Telecomunicații, Automatică și Calculatoare și Electrotehnică). Cursul universitar se adresează studenților din anul întâi la Politehnică, fiind destinat studiului de-a lungul unui semestru universitar.

Un curs general de Fizică ar trebui să cuprindă capitolele: mecanică, fizică moleculară și termodinamică, electricitate și magnetism, optică, fizică atomică și nucleară, fizică cuantică și fizica solidului. Dintre aceste capitole, în acest curs universitar ne vom rezuma la studiul pe scurt al legilor mecanicii, incluzând studiul oscilațiilor și undelor elastice. Vom aborda apoi fenomenele electromagnetice. Aceste capitole ale fizicii clasice sunt urmate apoi de scurte introduceri în fizica cuantică și în fizica solidului, deoarece acestea din urmă constituie capitole ale fizicii moderne, cu aplicații noi în tehnică.

Notițele de curs au fost elaborate după ce acest material a fost parcurs, în ultimii ani universitari, împreună cu studenții de la Colegiul "Multimedia" și cu cei de la cursul de cinci ani, ingineri, de la Facultatea de Electronică și Telecomunicații, a Universității "Politehnica" din Timișoara. Considerăm, de aceea, că temele alese cuprind noțiunile elementare de fizică necesare viitorilor ingineri.

Primul capitol cuprinde o introducere în Fizică, având scopul de a pregăti studenții cu limbajul, mărimile fizice fundamentale și unitățile lor de măsură, precum și cu unele operații vectoriale.

Capitolul al doilea se referă la teme specifice ale mecanicii clasice, prezentând principiile fundamentale și teoremele generale din dinamica punctului material.

În capitolul trei se prezintă diverse tipuri de oscilații armonice, diferitele metode de compunere ale oscilațiilor, urmate apoi de o introducere în teoria undelor elastice.

Capitolul al patrulea este dedicat electromagnetismului, prezentând într-o formă concentrată și câteva teme principale din teoria microscopică a undelor electromagnetice (lumina).

În capitolul cinci se realizează o trecere în revistă a bazelor fizice ale mecanicii cuantice, adică a acelor experiențe ce au condus la formularea mecanicii cuantelor de energie.

Capitolul șase prezintă teme din fizica solidului, incluzând câteva elemente ale teoriei benzilor de energie din semiconductori.

## CUPRINS

<b>1.</b>	<b>Introducere în Fizică</b>	7
1.1.	Noțiuni fundamentale ale Fizicii	7
1.2.	Operații vectoriale	12
<b>2.</b>	<b>Mecanică clasică</b>	15
2.1.	Noțiuni generale	15
2.2.	Principiile fundamentale ale dinamicii	18
2.3.	Teoreme generale în dinamica punctului material	21
<b>3.</b>	<b>Oscilații și unde</b>	27
3.1.	Noțiuni generale	27
3.2.	Mișcarea oscilatorie armonică ideală	28
3.3.	Compunerea mișcărilor oscilatorii armonice	33
3.3.1.	Compunerea oscilațiilor armonice paralele de aceeași pulsație	33
3.3.2.	Compunerea oscilațiilor armonice paralele de frecvență diferită	35
3.3.3.	Compunerea oscilațiilor perpendiculare	39
	Mișcarea oscilatorie amortizată	44
3.5.	Analogie între oscilațiile mecanice și cele electromagnetice	48
3.6.	Oscilații forțate. Rezonanța	51
3.6.1.	Rezonanța	53
3.6.2.	Considerații energetice ale oscilațiilor forțate	56
3.7.	Unde elastice	59
3.7.1.	Unde armonice unidimensionale	59
3.7.2.	Considerații energetice asupra propagării undei	62
3.7.3.	Reflexia și refracția undelor elastice	66
3.7.4.	Unde staționare	69
3.7.5.	Interferența undelor	72
3.7.6.	Difracția undelor	77
3.7.7.	Polarizarea undelor elastice transversale	78
<b>4.</b>	<b>Introducere în electromagnetism</b>	80
4.1.	Câmpul electromagnetic	80

4.1.1.	Acțiunea câmpului electromagnetic asupra sarcinilor electrice	80
4.1.2.	Legea conservării sarcinii electrice	82
4.2.	Electrostatica	84
4.2.1.	Câmpul electric	86
4.2.2.	Fluxul electric	89
4.2.3.	Legea Gauss pentru câmpul electric	91
4.2.4.	Forma locală diferențială a legii lui Gauss. Prima ecuație Maxwell	94
4.2.5.	Caracterul potențial al câmpului electric. Potențialul electric	96
4.3.	Magnetostatica	99
4.3.1.	Câmpul magnetic	99
4.3.2.	Acțiunea câmpului magnetic asupra sarcinilor electrice în mișcare	100
4.3.3.	Acțiunea câmpului magnetic asupra unui conductor parcurs de curent electric	101
4.3.4.	Câmpul magnetic creat de curenți electrici	102
4.3.5.	Legea lui Gauss pentru magnetism	106
4.3.6.	Interacțiunea dintre doi curenți paraleli	107
4.3.7.	Legea circuitului magnetic	108
4.3.8.	Inducția electromagnetică. Legea Faraday	110
4.3.9.	Energia câmpului magnetic	114
4.3.10.	Curenți de conducție și curenți de deplasare	116
4.4.	Unde electromagnetice	117
4.4.1.	Unde armonice progresive	121
4.4.2.	Energia undelor electromagnetice	121
4.4.3.	Unde sferice	123
4.4.4.	Teoria electromagnetică microscopică a luminii	124
<b>5.</b>	<b>Bazele fizice ale mecanicii cuantice</b>	<b>134</b>
5.1.	Efectul fotoelectric	134
5.2.	Efectul Compton	139
5.3.	Radiația termică	141
5.3.1.	Mărimi radiante	142
5.3.2.	Legile radiației termice	146
5.4.	Experiența Franck-Hertz	147
5.5.	Relațiile de nedeterminare ale lui Heisenberg	149
5.6.	Ipoteza lui Louis de Broglie	152

<b>6.</b>	<b>Elemente de fizica starii solide</b>	155
6.1.	Generalități	155
6.2.	Semiconductori	157
6.3.	Dispozitive cu semiconductori	158
	<b>Bibliografie</b>	161

## Cuvânt de mulțumire

Mă simt onorată pentru posibilitatea de a le mulțumi studenților din anii *I Electromecanică*, seria 1996-1997, *I și III Inginerie de Afaceri în Electrotehnică*, seriile 1997-1998 și 1988-1999, *I Electronegetică*, seriile 1997-1998 și 1998-1999, *I Electronică și Telecomunicații*, colegiul “*Multimedia*”, seriile 1999 până în prezent, dar nu în ultimul rând, studenților din seria *B*, an *I ETc ingineri*, din generația bobocilor anului universitar 2001-2002. Le mulțumesc tuturor acestor studenți, pentru răbdarea cu care au ascultat acest curs de Fizică generală și pentru ajutorul acordat întru cizelarea notițelor de curs, până la forma lor actuală. În fapt, putem conchide că un curs universitar ideal nu există. Din fericire, ar zice strămoșii, dar și urmașii, noștri.

Recunoștința mea sinceră se adresează, de asemenea, prietenului și colegului din Catedra de Fizică, Conf.dr.Dușan Popov, sub a cărui supervizare apare acest curs universitar de Fizică generală în format electronic. Este o premieră pentru Catedra de Fizică a Universității “Politehnica” din Timișoara, deși ea va fi urmată de mulți alți colegi.

Nu în ultimul rând, doresc să le mulțumesc studenților din anul *I ETc, ingineri*, “bobocii din semestrul doi”, seria *B*, generația 2001-2002, care m-au ajutat să introduc textul și care au ales figurile din capitolele de Electromagnetism și Mecanică cuantică. O singură observație aș avea, dar lejeră: au uitat să specifice sursa bibliografică a unor figuri. Dar nu este prea grav, deoarece venim la Universitate ca să învățăm. Mii de scuze autorilor acestor figuri minunate, care nu sunt însă citați.

Aceste notițe de curs universitar on line sunt dedicate copiilor mei, studenți rândul lor, dar nu la Științe Fizice, Adinel și Bogdănel Barvinschi.

## 1. Introducere în Fizică

Fizica, fiind una din științele fundamentale ale naturii, studiază cele mai simple dar, în același timp, și cele mai generale forme de mișcare sau de transformare ale materiei. În acest sens, fizica studiază toate procesele mecanice, termice, electromagnetice, etc. Scopul fizicii este acela de a descoperi și aplica legile care guvernează interacțiunile dintre corpurile materiale sau dintre corpurile materiale și diferite câmpuri de forțe.

Observația, rațiunea și experiența formează metoda științifică de studiere a naturii, scopul acestui demers științific fiind înțelegerea fenomenelor ce se desfășoară în universul cunoscut de om până în prezent. Cea mai importantă misiune a fizicii este stabilirea legilor generale care pot explica modul în care se desfășoară fenomenele fizice observate în natură. Înțelegerea legilor fizice ale universului nostru a devenit din ce în ce mai profundă de-a lungul veacurilor, de aceea multe legi ale fizicii au suferit modificări, completări sau generalizări, pe măsură ce oamenii de știință au realizat descrieri tot mai complexe ale naturii.

În mod tradițional, fizica se împarte în mai multe domenii: mecanica, termodinamica, electromagnetismul, optica, fizica solidului, fizica nucleară. În secolul trecut au fost introduse noi capitole ale fizicii, cum ar fi: fizica plasmei, fizica semiconductorilor, fizica supraconductorilor, biofizica, fizica particulelor elementare, etc. Din acest punct de vedere, putem vorbi de caracterul pluridisciplinar al științei în general, deoarece multe din fenomenele studiate se situează deseori la granița dintre mai multe domenii științifice.

### 1.1. Noțiuni fundamentale ale Fizicii

**Fenomen fizic.** Fenomenul fizic (procesul sau transformarea) reprezintă o succesiune de modificări ale unui anumit corp, sau sistem de corpuri, care evoluează în timp, după o anumită lege. Toate schimbările de acest fel formează obiectul de studiu al fizicii și sunt evaluate calitativ și cantitativ prin observații.

**Mărime fizică și măsurare.** Mărimile fizice definesc proprietăți ale corpurilor sau caracterizează procese în care schimbările ce survin pot fi descrise cantitativ. Exemple de *mărimi fizice* sunt: masa, temperatura, viteza, sarcina electrică. Fizica a fost numită mult timp *știința măsurării*, deoarece studiul fenomenelor fizice implică măsurarea mărimilor ce le caracterizează. *Măsurarea* este un proces prin care se compară mărimea fizică respectivă cu o mărime bine definită, de aceeași natură, ce a fost aleasă ca *unitate de măsură*. Această comparare (sau măsurare) se realizează cu ajutorul unui *instrument de*

*măsură*. Iată câteva exemple de unități de măsură: 1metru pentru lungimi, 1 secundă pentru durate, 1 kg pentru mase.

Unele mărimi fizice sunt *mărimi fundamentale*, ele fiind definite numai prin descrierea procedurii de măsurare. De exemplu, distanța se determină prin măsurare cu o riglă, iar timpul prin măsurare cu un ceas. Alte mărimi fizice sunt *mărimi derivate*, ele fiind definite prin formule de calcul ce utilizează mărimile fundamentale. De exemplu, viteza reprezintă raportul dintre distanța parcursă și durata deplasării corpului.

De-a lungul timpului s-au utilizat diferite *sisteme de unități de măsură*, adică seturi de mărimi fizice fundamentale și de unități de măsură corespunzătoare acestora. În zilele noastre se utilizează cel mai frecvent *Sistemul Internațional de Măsură*, cunoscut sub sigla SI, care utilizează următoarele mărimi și unități fundamentale:

<b>Mărimea fizică fundamentală</b>	<b>Unitate de măsură</b>	<b>Simbol</b>
Lungimea	1 metru	m
Masa	1 kilogram	kg
Timpul	1 secundă	s
Intensitatea curentului electric	1 amper	A
Temperatura absolută	1 kelvin	K
Intensitatea luminoasă	1 candelă	candelă (cd)
Cantitatea de substanță	1 mol	mol

Două unități suplimentare se adaugă celor de mai sus, și anume pentru unghiul plan, radianul (rad) și pentru unghiul solid, steradianul (sterad). Toate celelalte mărimi fizice și unitățile lor se exprimă cu ajutorul mărimilor fizice și al unităților lor fundamentale. În ceea ce privește multiplii și submultiplii unităților de măsură, pentru a le exprima, se utilizează următoarele prefixe:

Pentru multipli:  $10^1$  deca-;  $10^2$  hecto-;  $10^3$  kilo-;  $10^6$  mega-;  $10^9$  giga-;  $10^{12}$  tera-.

Pentru submultipli:  $10^{-1}$  deci-;  $10^{-2}$  centi-;  $10^{-3}$  mili-;  $10^{-6}$  micro-;  $10^{-9}$  nano-;  $10^{-12}$  pico- .

**Alte Sisteme de Unități.** Dintotdeauna, oamenii au avut libertate în alegerea mărimilor fizice și a unităților lor de măsură. De aici a rezultat un anumit grad de arbitrar în exprimarea mărimilor fizice. De exemplu, în locul masei se poate alege ca mărime fundamentală forța. Cele mai frecvente sisteme de unități întâlnite în practică, în afară de SI, sunt: CGS (centimetru-gram-secundă) și MKfS (metru-kilogram-forță-secundă). O parte a literaturii de fizică este scrisă în sistemul CGS, deoarece era sistemul cel mai răspândit în secolele XVIII și XIX. Dar legile fizicii, care exprimă relații între mărimi fizice măsurabile, sunt aceleași indiferent de sistemul de unități utilizat pentru a le exprima.

Mărimile fizice pot fi *mărimi scalare* sau *mărimi vectoriale*. Mărimile fizice scalare sunt determinate numai prin valoarea lor numerică. Un exemplu de mărime scalară este masa unui corp,  $m = 2$  kg. Mărimile vectoriale sunt determinate prin valoarea lor numerică (numită mărimea vectorului sau *modulul vectorului*), prin direcția și sensul vectorului. Modul de scriere al unui vector este următorul: (i)



$\vec{F}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{i}$ ,  $\vec{a}$ , sau (ii) prin litere cu caractere mai groase, **F**, **v**, **E**, **i**, **a**. Modulul vectorului poate fi scris sub forma:  $\|\vec{F}\|$ ,  $\|\vec{v}\|$ ,  $\|\vec{E}\|$ ,  $\|\vec{i}\|$ ,  $\|\vec{a}\|$  sau **F**, **v**, **E**, **i**, **a**. În paragraful 1.2 vom prezenta operațiile vectoriale utilizate cel mai frecvent.

**Câmp fizic.** Se numește câmp fizic regiunea din spațiu unde se manifestă o anumită mărime fizică și unde, în fiecare punct din regiune, mărimea fizică are o anumită valoare. Câmpurile fizice pot fi *câmpuri scalare* sau *câmpuri vectoriale*, în funcție de mărimea fizică ce le caracterizează. Exemple de câmpuri fizice sunt: (i) temperatura dintr-o cameră, care formează un câmp scalar; (ii) vectorii câmp electric dintr-un nor de ploaie, care generează un câmp vectorial.

**Lege fizică.** Anumite fenomene sau procese fizice pot avea legături cauzale bine definite. Prin observații sau prin determinări experimentale, oamenii descoperă aceste legături și stabilesc relațiile cauzale între schimbările diferitelor mărimi fizice ce caracterizează fenomenele respective. Legile generale care guvernează *fenomenele fizice* se numesc *legi fizice*. Pe baza legilor fizice se poate analiza un anumit fenomen care este observat în natură sau în laborator. De asemenea, aplicând legi fizice specifice, se poate prevedea starea viitoare a unui sistem fizic.

**Experiment fizic.** Observațiile dirijate efectuate în laborator, în scopul înțelegerii unor fenomene fizice, se numesc experimente. Pentru a fi considerate valabile, experimentele trebuie să îndeplinească unele condiții. Trebuie să existe o concordanță între: (i) rezultatele analizei științifice a unui anumit fenomen (exprimate printr-o lege), (ii) observațiile dirijate din laborator (experiment) și (iii) observarea fenomenului în natură.

**Timp.** Timpul reprezintă o măsură a duratei proceselor fizice, el fiind măsurat prin durata unui anumit proces. Măsurarea timpului se poate face cu ajutorul unor mișcări periodice (oscilații mecanice, vibrații atomice sau moleculare). Unitățile și etaloanele de timp au evoluat de-a lungul timpului, ele stabilindu-se în funcție de durata unui anumit fenomen fizic periodic uniform. În prezent, unitatea de timp este secunda. Secunda este definită pe baza perioadei,  $T_{Cs}$ , a radiațiilor emise de atomii izotopilor de Cesium-133, în urma unor anumite tranziții între două stări energetice.

**Spațiul și lungimea.** Corpurile fizice ocupă un anumit loc în spațiu, având anumite dimensiuni (lungime, lățime, grosime, volum, arie, etc.). De asemenea, locul lor în spațiu se modifică în funcție de mișcarea pe care o efectuează. Dimensiunea unui corp se stabilește prin compararea sa cu un alt corp, considerat etalon de lungime. Etalonul de lungime actual este metrul, care reprezintă 1650763,73 lungimi de undă ale radiației portocalii a atomului de Kripton-86 la tranziția  $2p_{10} \rightarrow 5d_5$  în vid. În mod formal, standardul pentru unitatea de măsură a lungimii este distanța dintre două linii paralele trasate pe o bară de platină-iridiu, păstrată în condiții de presiune și temperatură constante, la Sèvres (lângă Paris). Toate celelalte lungimi se exprimă prin compararea cu acest metru-standard.

*Spațiul* constituie o noțiune filozofică, el fiind "locul" în care se desfășoară fenomenele fizice. Spațiul fizic convențional este spațiul euclidian, care este tridimensional. În spațiul tridimensional sunt suficiente trei numere care să descrie poziția unui corp în spațiu. Aceste numere sunt determinate prin

alegerea Sistemului de referință față de care se raportează corpul. *Sistemul de referință* este format dintr-un sistem de trei axe perpendiculare între ele în spațiul tridimensional și un ceasornic, în așa fel încât să se poată determina distanțe și durate de timp. Axele sistemului de referință au câte un vector unitate, numit *versor*, de modul unitate, și a cărei direcție dă sensul pozitiv al axei respective. În fig.1.1 se prezintă un sistem de referință, în care axele de coordonate sunt Ox, Oy și Oz. Versorii axelor sunt vectorii  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  și  $\vec{k}$ .

Modul în care se exprimă poziția corpului în spațiu depinde de *sistemul de coordonate*. De regulă, cele trei numere care descriu poziția corpului sunt proiecțiile, pe cele trei axe ale sistemului de referință, ale punctului care constituie centrul de masă al corpului. Acestea se numesc *coordonatele carteziane* ale corpului. Alte sisteme de coordonate utilizează o distanță și două unghiuri (coordonate sferice), sau două distanțe și un unghi (coordonate cilindrice).

**Punct material.** Un corp fizic cu dimensiuni neglijabile și având masa concentrată într-un punct, numit *centru de masă*, se numește *punct material*. Aproximația de punct material constituie cel mai simplu *model fizic*. Pe durata deplasării sale, punctul material se numește *mobil*. Poziția mobilului M din fig.1.1 este dată de *vectorul de poziție*, exprimat în funcție de coordonatele carteziane sub forma :

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad (1.1)$$

Numerele x, y, și z se numesc *coordonatele carteziane* ale punctului M.

Modulul vectorului de poziție este dat de relația:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.2)$$

Relația (1.2) a fost introdusă și în geometria analitică, pentru a exprima distanța dintre două puncte în spațiu.

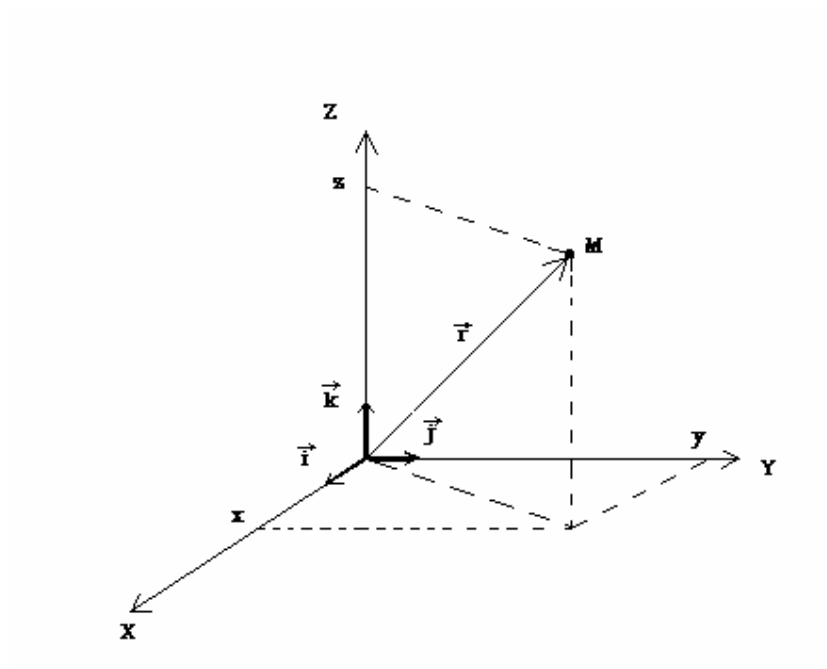


Fig. 1.1. Sistem de referință. Coordonatele carteziene ale punctului M.

## 1.2. Operații vectoriale

Să considerăm că doi sau mai mulți vectori acționează într-o zonă din spațiu. Ne interesăm de rezultatul compunerii vectorilor, care poate însemna: adunare, produs scalar sau produs vectorial.

### Suma vectorilor

Suma, sau *rezultanta*, a doi vectori este dată de diagonala paralelogramului având ca laturi cei doi vectori cu originea comună, așa cum se poate vedea în fig.1.2. Fie vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , atunci  $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$  este suma lor. Această regulă de adunare a vectorilor se numește *regula paralelogramului*.

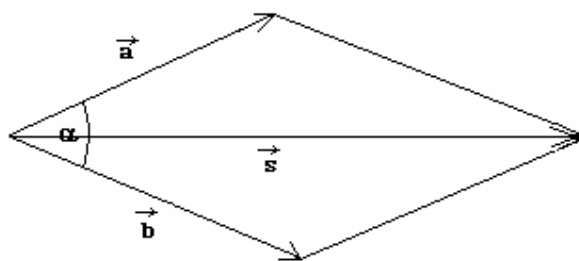


Fig. 1.2. Suma a doi vectori.

Modulul vectorului rezultat se calculează cu *formula lui Pitagora generalizată*:

$$s = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} \quad (1.3)$$

În cazul compunerii a mai mulți vectori, se aplică succesiv regula paralelogramului, sau se folosește *regula poligonului*. Pentru aplicarea regulii poligonului, vectorii sunt reprezentați unul după altul, fiecare având originea în vârful celui pe care-l precede. În acest caz, linia care închide poligonul format de vectori reprezintă suma lor vectorială, având originea în originea primului vector și vârful în vârful ultimului vector, așa cum se vede în fig. 1.3.

Reciproc, orice vector poate fi descompus, după două direcții arbitrare în plan, obținând doi vectori coplanari, sau după trei direcții arbitrare în spațiu, obținându-se componentele vectorului după acele direcții.

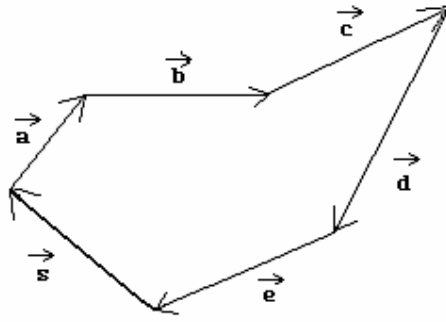


Fig. 1.3. Regula poligonului.

Dacă cele două direcții (sau trei în reprezentarea tridimensională) sunt perpendiculare între ele, atunci componentele vectorului se numesc *componente ortogonale*, așa cum se vede în fig.1.4. Componentele vectorului  $\vec{a}$  în plan sunt  $a_x$  și  $a_y$ :

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \quad (1.4)$$

Atunci când se fac proiecțiile vectorului pe cele trei axe de coordonate carteziene, se obțin componentele ortogonale în spațiu ale vectorului  $\vec{a}$ , date de relația (1.5), și reprezentate în fig.1.5.

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (1.5)$$

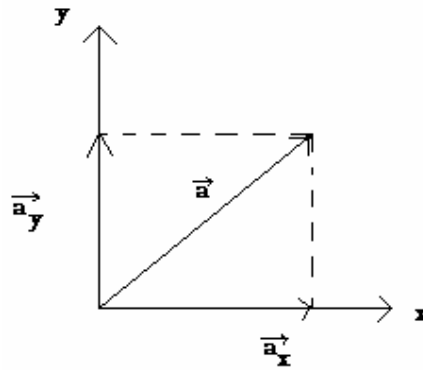


Fig. 1.4. Componentele ortogonale în plan ale unui vector.

Componentele vectorului  $\vec{a}$  se pot aduna, rezultând modulul vectorului.

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

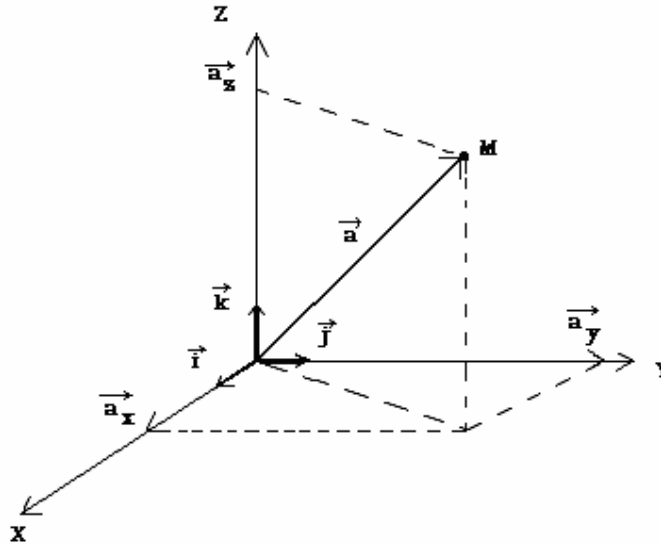


Fig. 1.5. Componentele unui vector în spațiu.

### Produs scalar a doi vectori.

Produsul scalar a doi vectori este mărimea scalară dată de operația:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1.6)$$

unde  $\alpha$  este unghiul dintre direcțiile celor doi vectori, iar  $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z$  sunt componentele celor doi vectori. În urma operației de produs scalar a doi vectori se obține un scalar.

### Produs vectorial a doi vectori.

Prin produsul vectorial a doi vectori se obține o mărime vectorială, dată de rezultatul determinantului următor:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (1.7)$$

Vectorul rezultat al produsului vectorial a doi vectori este orientat perpendicular pe planul format de cei doi vectori, având sensul dat de regula burghiului drept.

Dacă se cunoaște unghiul format de cei doi vectori, atunci modulul vectorului obținut prin produsul vectorial este de forma:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a b \sin \alpha \quad (1.8)$$

unde  $\alpha$  este unghiul dintre direcțiile celor doi vectori.

## 2. Mecanică clasică

Mecanica clasică se bazează pe legi ale naturii ce au fost formulate de Isaac Newton în anul 1686 în lucrarea sa, devenită celebră, "Principiile fundamentale ale științelor naturii". Mai precis, mecanica este acea parte a fizicii care studiază mișcarea mecanică a corpurilor și condițiile de echilibru ale acestora. Problema mecanicii este stabilirea ecuațiilor de mișcare ale corpurilor.

Ecuatiile de mișcare dau forma traiectoriei mișcării corpului. *Traectoria* indică pozițiile succesive în spațiu pe care le va ocupa corpul de-a lungul mișcării sale.

### 2.1. Noțiuni generale

Cunoașterea mișcării unui corp presupune stabilirea localizării lui în spațiu și în timp. Fie un punct material M, aflat în mișcare pe o traiectorie în spațiu, ca în fig.2.1.

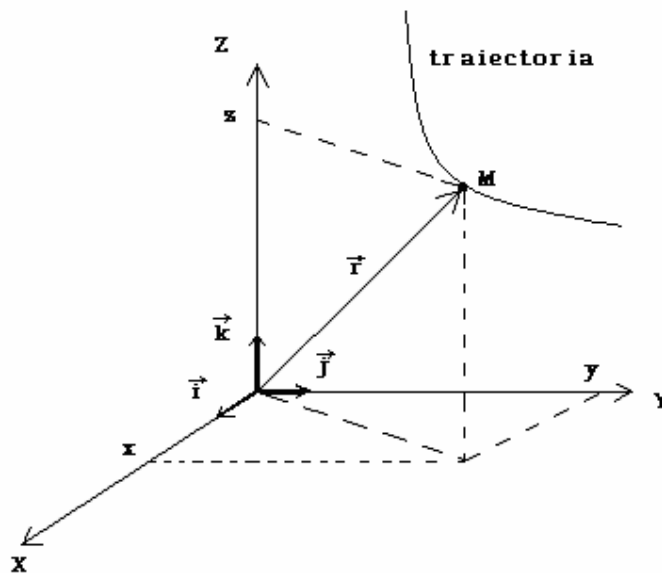


Fig. 2.1. Traiectoria punctului material într-un sistem de referință cartezian.

*Vectorul de poziție* al punctului material, dat de relația (1.1), este de forma:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad (2.1)$$

Distanța parcursă de mobil în decursul mișcării este dată de *vectorul deplasare*, definit ca:

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (2.2)$$

unde  $\vec{r}_1$  și  $\vec{r}_2$  sunt vectorii de poziție ai punctului material în momentele  $t_1$  și  $t_2$ .

*Viteza medie* a punctului material este raportul dintre vectorul deplasare,  $\vec{\Delta r}$ , (și intervalul de timp în care s-a efectuat deplasarea:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} \quad (2.3)$$

*Viteza momentană*, sau instantanee, se obține din limita când  $\Delta t$  tinde la zero în relația (2.3), adică viteza instantanee reprezintă derivata în raport cu timpul a vectorului deplasare:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad (2.4)$$

În formula (2.4) am folosit notația  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$ , care reprezintă o notație uzuală pentru derivata *vectorului deplasare în raport cu timpul*. Vectorul viteză momentană este tangent la traiectorie, așa cum se vede în fig.2.2.

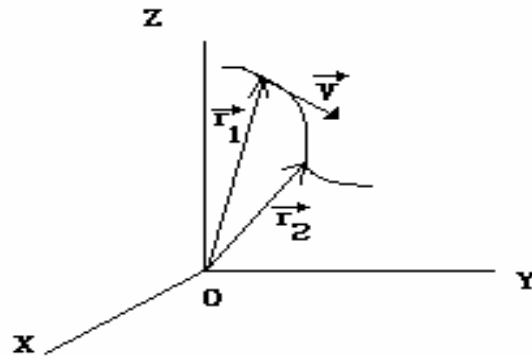


Fig. 2.2. Vectorul viteză momentană.

Având în vedere faptul că versorii axelor de coordonate sunt vectori constanți, rezultă că derivarea în raport cu timpul a vectorului de poziție se aplică doar coordonatelor,  $x$ ,  $y$  și  $z$ , ale punctului material, obținându-se viteza momentană sub forma:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k} \quad (2.5)$$

unde derivatele în raport cu timpul ale coordonatelor reprezintă componentele,  $v_x$ ,  $v_y$  și  $v_z$ , ale vectorului viteză momentană:



$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_x \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = v_y \\ \dot{z} = \frac{dz}{dt} = v_z \end{cases} \quad (2.6)$$

*Accelerația medie* a punctului material reprezintă variația vectorului viteză împărțită la intervalul de timp corespunzător acestei variații:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (2.7)$$

*Accelerația momentană*, sau instantanee, a punctului material este definită ca derivata vectorului viteză în raport cu timpul, deci este a doua derivată în raport cu timpul a vectorului deplasare:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \quad (2.8)$$

Componentele vectorului accelerație momentană reprezintă derivatele în raport cu timpul ale componentelor vitezei particulei:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \dot{v}_x = a_x \\ \ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \dot{v}_y = a_y \\ \ddot{z} = \frac{d^2 z}{dt^2} = \dot{v}_z = a_z \end{cases} \quad (2.9)$$

Notățiile  $\ddot{r}$ ,  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$ , sau  $\ddot{z}$  reprezintă derivatele de ordinul doi în raport cu timpul ale mărimilor fizice respective.

## 2.2. Principiile fundamentale ale dinamicii

Rezolvarea problemelor de mecanică clasică se bazează pe câteva principii fundamentale, obținute prin generalizarea observațiilor experimentale. Cele trei principii, ce au fost formulate de Galilei și de Newton, sunt suficiente pentru a explica toate mișcărilor mecanice clasice, adică mișcărilor ce se desfășoară cu viteze mult mai mici decât viteza luminii în vid,  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s. Dacă vitezele punctelor materiale se apropie de viteza luminii în vid, atunci mișcărilor lor se supun *principiilor relativității restrânse ale lui Einstein*.

### **Principiul inerției**

*Principiul inerției* a fost formulat prima dată de Galilei și este cunoscut sub forma următoare:

"Un corp își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă atâta timp cât asupra lui nu se exercită nici o forță, sau dacă rezultanta tuturor forțelor este zero".

Principiul inerției introduce noțiunea de forță. *Forța* este o mărime vectorială, având ca unitate de măsură în SI 1 newton,  $[F]_{SI} = 1$  N. Prin intermediul forțelor, corpurile acționează unele asupra altora, transmițând mișcarea mecanică. Câmpurile de forțe sunt și ele răspunzătoare de transmiterea interacțiunilor mecanice.

Conform acestui principiu, rezultanta egală cu zero a unui număr oarecare de forțe este echivalentă cu inexistența forței. Mișcarea unui corp asupra căruia acționează mai multe forțe a căror rezultantă este nulă sau asupra căruia nu acționează nici o forță se numește *mișcare inerțială*.

Așa cum știm, mișcarea este caracterizată în raport cu un sistem de referință ales arbitrar, de aceea *mișcarea are caracter relativ*. În acest sens, Galilei a formulat *principiul relativității* mișcării mecanice. Să considerăm un călător așezat într-un vagon de tren, ce se deplasează rectiliniu și uniform. Călătorul se poate găsi într-una din stările mecanice următoare: (i) este în repaus, în raport cu sistemul de referință legat de tren, (ii) este în mișcare rectilinie uniformă cu o viteză egală cu viteza trenului față de un sistem de referință legat de Pământ, (iii) este în mișcare accelerată, în raport cu un sistem de referință legat de Soare, deoarece Pământul este în mișcare accelerată față de Soare. Toate sistemele de referință ce se mișcă rectiliniu și uniform se numesc *sisteme de referință inerțiale*. În aceste sisteme de referință este valabil principiul inerției.

### **Principiul forței sau a doua lege a dinamicii**

Newton a descoperit faptul că o forță care acționează asupra unui corp îi imprimă acestuia o accelerație, proporțională cu forța și invers proporțională cu masa corpului. De aceea el a scris legea a doua a dinamicii sub forma:

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (2.10)$$

Masa este o măsură a cantității de materie conținută în corp. Cantitatea de mișcare sau impulsul unui corp se definește ca produsul dintre masa și vectorul viteză al corpului:

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad (2.11)$$

Unitatea de măsură pentru impulsul mecanic este  $[p]_{SI} = 1 \text{ kg m s}^{-1}$ .

Pornind de la impulsul mecanic al corpului, putem deduce forma cea mai completă a definiției forței pentru un corp de masă constantă. Derivăm impulsul mecanic în raport cu timpul:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Dacă masa este constantă, derivata ei în raport cu timpul este nulă, iar relația de mai sus devine:

$$\vec{F} = \frac{d(m \vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.12)$$

Astfel, legea fundamentală a dinamicii se scrie sub forma:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.13)$$

sau, în cazul corpurilor de masă constantă, legea se scrie sub forma:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Viteza este prima derivată în raport cu timpul a vectorului de poziție. Rezultă că forța se poate exprima și sub forma:

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \ddot{\vec{r}} \quad (2.14)$$

Ecuatiile de mișcare se obțin din legea (2.14), sub forma unor ecuații diferențiale de ordinul doi. Prin integrarea acestor ecuații, ținând cont de condițiile inițiale, se obțin legile de mișcare ale corpurilor.

### **Principiul acțiunii și reacțiunii.**

" Oricărei acțiuni i se opune întotdeauna o reacțiune egală în modul și de sens contrar." Cele două forțe, acțiunea și reacțiunea, sunt aplicate simultan și la corpuri diferite, de-a lungul dreptei care unește cele două corpuri. În acest caz este vorba de interacțiunea mutuală simultană și nu de o cauză și un efect.

### **Principiul independenței acțiunii forțelor**

Experimental, se constată că fiecare dintre forțele la care este supus un corp acționează independent de celelalte forțe aplicate corpului. Din acest principiu rezultă posibilitatea înlocuirii unui ansamblu de forțe,  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , prin rezultanta lor, egală cu suma vectorială:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (2.15)$$

### **Principiul relativității din mecanica clasică.**

Mișcarea mecanică este raportată la sisteme de referință. Din acest punct de vedere, mișcarea este relativă. Sistemele de referință pot fi în repaus, în mișcare rectilinie și uniformă (sisteme de referință inerțiale), sau în mișcare accelerată (sisteme de referință neinerțiale). În anul 1632 Galilei enunță principiul relativității în mecanica clasică, afirmând că toate legile mecanicii rămân neschimbate față de orice sistem de referință inerțial. Din punct de vedere mecanic, toate sistemele de referință inerțiale sunt absolut echivalente. Nici un sistem de referință inerțial nu poate fi considerat absolut, toate fiind egal îndreptățite. Prin urmare, nici o experiență mecanică efectuată în interiorul unui sistem de referință inerțial nu ne permite să determinăm mișcarea rectilinie și uniformă sau starea de repaus a sistemului de referință față de stelele fixe (adică față de alte sisteme de referință inerțiale). Din interiorul vagonului de tren din exemplul anterior nu ne putem da seama dacă acesta merge uniform și rectiliniu sau stă pe loc, deoarece orice experiență mecanică dă același rezultat în ambele cazuri.

Lucrurile se schimbă radical atunci când avem de-a face cu sisteme de referință neinerțiale, adică aflate în mișcare accelerată. În acest caz legile lui Newton nu mai sunt valabile și cu ajutorul experiențelor mecanice efectuate în interiorul sistemului putem determina accelerația acestuia. În sistemele de referință neinerțiale se exercită *forțele de inerție*. Cel mai simplu exemplu de forță de inerție este *forța centrifugă* din mișcarea circulară.

### 2.3. Teoreme generale în dinamica punctului material

Ca o consecință a principiilor fundamentale ale dinamicii, se obțin legile ce guvernează unele mărimi fizice ale punctului material (impuls mecanic, energie, moment cinetic). Aceste legi se mai numesc și *teoremele generale* în dinamica punctului material.

#### **Teorema impulsului**

Impulsul mecanic sau *cantitatea de mișcare* este un o mărime vectorială ce caracterizează starea de mișcare mecanică a punctului material. Atunci când asupra punctului material se exercită forțe, acesta își schimbă impulsul mecanic. Aplicând legea fundamentală a dinamicii, putem deduce teorema impulsului:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Forța care acționează asupra punctului material este egală cu variația impulsului mecanic al acestuia în unitatea de timp. Dacă forța este constantă, impulsul mecanic va crește în timp.

$$\int_1^2 d\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{F} \int_{t_1}^{t_2} dt = \vec{F}(t_2 - t_1) \quad (2.16)$$

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{F}(t_2 - t_1)$$

Dacă forța este nulă, atunci impulsul mecanic rămâne constant.

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{constant} \quad (2.17)$$

Relația (2.17) constituie *teorema conservării impulsului mecanic*: Impulsul mecanic al punctului material este constant dacă asupra acestuia nu acționează forțe, sau dacă rezultanta lor este nulă.

Această teoremă de conservare se extinde și asupra sistemelor de puncte materiale: Într-un sistem fizic izolat față de mediu, sau dacă rezultanta forțelor exterioare exercitate asupra sistemului este nulă, impulsul mecanic al sistemului se conservă.

#### **Teorema momentului cinetic**

*Momentul cinetic*,  $\vec{J}$ , al punctului material este rezultatul produsului vectorial dintre vectorul de poziție și impulsul punctului material:

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (2.18)$$

Conform definiției produsului vectorial, vectorul moment cinetic este orientat perpendicular pe planul format de vectorii  $\vec{r}$  și  $\vec{p}$  și are sensul dat de regula burghiului drept. Momentul cinetic este exprimat în SI în:  $[J]_{SI} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ J s}$ .

*Momentul unei forțe* care acționează asupra punctului material în raport cu un pol este rezultatul produsului vectorial dintre vectorul de poziție al punctului de aplicație al forței și forță:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\vec{a} \quad (2.19)$$

Momentul forței exprimă capacitatea forței de a roti corpul în jurul unei axe care trece prin polul considerat. Unitatea de măsură pentru momentul forței este:  $[M]_{SI} = 1 \text{ N m}$ .

Plecând de la definiția momentului forței și utilizând formula fundamentală a dinamicii, putem deduce teorema momentului cinetic:

$$\vec{M} = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{J}}{dt}$$

deoarece derivata în raport cu timpul a momentului cinetic este:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

În calculele formale de mai sus am ținut cont de faptul că produsul vectorial al vitezei cu impulsul mecanic este nul, cei doi vectori fiind paraleli ( $\sin 0^\circ = 0$ ). Astfel, obținem expresia *teoremei momentului cinetic*: Variația momentului cinetic al unui punct material în unitatea de timp este egală cu momentul forței care acționează asupra punctului material.

$$\vec{M} = \frac{d\vec{J}}{dt} \quad (2.20)$$

Dacă momentul forței este nul, atunci momentul cinetic se conservă.

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{J}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{J} = \text{constant} \quad (2.21)$$

Relația (2.21) constituie *teorema conservării momentului cinetic*.

### **Energia mecanică și teoremele energiei**

Considerăm mișcarea punctului material într-un câmp de forțe, ca în fig.2.3. Deplasarea punctului material pe drumul infinit scurt,  $d\vec{r}$ , se face sub acțiunea unei forțe  $\vec{F}$ . Se numește *lucru mecanic elementar* efectuat de forță mărimea scalară obținută din produsul scalar al forței cu deplasarea infinit mică:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.22)$$

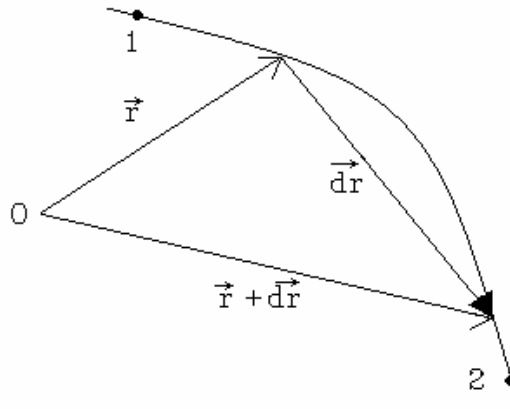


Fig. 2.3. O deplasare infinit mică a punctului material pe traiectorie.

Pentru calculul lucrului mecanic efectuat de forța  $\vec{F}$  la o deplasare a punctului material între punctele 1 și 2 ale traiectoriei se integrează lucrul mecanic elementar:

$$L_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{dr} \quad (2.23)$$

Lucrul mecanic se exprimă în Joule,  $[L]_{SI} = 1 \text{ J} = 1 \text{ N m}$ .

*Energia cinetică* este mărimea scalară egală cu produsul dintre masa și pătratul vitezei punctului material, împărțite la doi:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2.24)$$

Unitatea de măsură pentru energia cinetică este  $[E_c]_{SI} = 1 \text{ J}$ .

Pornind de la expresia lucrului mecanic elementar efectuat de forță asupra punctului material se poate deduce *teorema variației energiei cinetice*:

$$dL = \vec{F} \cdot \vec{dr} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{dr} = m \vec{dv} \frac{d\vec{r}}{dt} = m \vec{v} d\vec{v}$$

$$dL = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = dE_c$$

Aceste ultime calcule arată că variația infinitezimală a energiei cinetice a punctului material este egală cu lucrul mecanic elementar efectuat de forță asupra lui. Pentru o deplasare finită de la 1 la 2 a punctului material se obține teorema variației energiei cinetice: Lucrul mecanic efectuat de rezultanta forțelor care acționează asupra punctului material este egal cu variația energiei cinetice a acestuia:

$$L_{12} = E_{c2} - E_{c1} \quad (2.25)$$

Se constată că, în anumite cazuri, lucrul mecanic efectuat asupra punctului material nu depinde de forma drumului parcurs, ci numai de poziția inițială și finală (vezi fig. 2.4). În acest caz se spune că *forțele sunt conservative*, iar câmpul de forțe repectiv este un *câmp conservativ*, de asemenea. El se mai

numește și *câmp potențial*. Să considerăm drumurile (A) și (B) pe care se poate deplasa un punct material sub acțiunea unor forțe conservative.

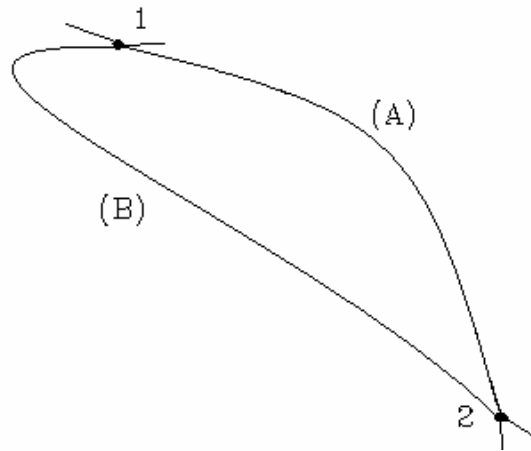


Fig. 2.4. Traiectorii ale punctului material între două puncte în spațiu.

Datorită faptului că lucrul mecanic efectuat la deplasarea între două puncte depinde doar de pozițiile 1 și 2 ale traiectoriilor posibile, vom putea scrie:

$$L_{12} = \int_{(A)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(B)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.26)$$

În acest caz, lucrul mecanic efectuat de forțele câmpului potențial se poate scrie și sub forma:

$$L_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) \quad (2.27)$$

unde  $U(\vec{r}_1)$  și  $U(\vec{r}_2)$  sunt *energiile potențiale* ale punctului material în punctele 1 și 2 ale traiectoriei.

Putem spune că lucrul mecanic efectuat de forțele conservative se realizează pe seama scăderii energiei potențiale a punctului material:

$$L_{12} = -\Delta U = -[U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)] \quad (2.28)$$

Lucrul mecanic efectuat de forțele conservative este egal cu variația energiei potențiale a punctului material luată cu semn schimbat. Această relație este valabilă și pentru deplasări infinit mici ale punctului material:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU$$

De aceea, se poate spune că forțele conservative derivă din potențiale, adică din energii potențiale:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU \Rightarrow \vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{r}} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}\right)$$



unde am utilizat *gradientul energiei potențiale*:

$$\nabla U = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \right)$$

În continuare să analizăm câteva câmpuri potențiale:

1. *Câmpul gravitațional*. Energia potențială în câmpul gravitațional depinde de înălțimea,  $h$ , la care se află punctul material, de masă  $m$ :

$$U = m g h$$

unde  $g$  este accelerația gravitațională.

De aceea forța de greutate este  $F = \frac{dU}{dh} = mg$ .

2. *Câmpul forțelor elastice*. Energia potențială este  $U = \frac{1}{2} kx^2$ , iar forța elastică este de forma:

$$F = -\frac{dU}{dx} = -kx$$

unde  $k$  este constanta de elasticitate.

3. *Câmpul electrostatic*. Potențialul electric al unei sarcini electrice, de valoare  $Q$ , este

$$V = \frac{Q}{4 \pi \epsilon r},$$

iar energia potențială a unei sarcini electrice  $q$  aflate în câmpul electric al lui  $Q$  este:

$$U = qV = \frac{qQ}{4 \pi \epsilon r}.$$

Derivând energia potențială la  $r$ , obținem expresia forței electrostatice:

$$F = -q \frac{dV}{dr} = \frac{qQ}{4 \pi \epsilon r^2}$$

### **Energia mecanică**

Prin definiție, suma dintre energia cinetică și energia potențială se numește *energie mecanică* a punctului material.

$$E_m = E_c + U \quad (2.29)$$

Dacă asupra punctului material acționează forțe neconservative, energia mecanică nu rămâne constantă. Exemple de forțe neconservative sunt: forța de tracțiune (duce la creșterea energiei mecanice) și forța de frecare (duce la scăderea energiei mecanice).

*Teorema conservării energiei mecanice*: în cazul mișcării în câmpuri de forțe conservative, energia mecanică a punctului material rămâne constantă. Teorema conservării energiei mecanice este valabilă și în cazul sistemelor de puncte materiale care sunt izolate față de mediu.

## Gradientul unei funcții scalare de coordonate

În anumite cazuri, avem nevoie de un vector special, numit vectorul nabra, ale cărui componente sunt definite prin operațiile de derivare parțială:

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Atunci când este aplicat unei mărimi scalare, vectorul nabra dă trei cantități ce formează componentele unui vector. Operația numită gradientul unei funcții scalare,  $U(x, y, z)$ , constă în:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}$$

*Semnificația fizică a gradientului.* Vectorul gradient al unei funcții scalare de potențial este perpendicular pe suprafața de potențial constant, fiind orientat în sensul celei mai rapide variații în spațiu a funcției potențial.

### 3. Oscilații și unde

#### 3.1. Noțiuni generale

Se numește *oscilație* fenomenul fizic în decursul căruia o anumită mărime fizică a procesului prezintă o variație periodică sau pseudo-periodică. Un sistem fizic izolat, care este pus în oscilație printr-un impuls, efectuează *oscilații libere* sau proprii, cu o frecvență numită *frecvența proprie* a sistemului oscilant. Oscilațiile pot fi clasificate în funcție de mai multe criterii.

Din punct de vedere al formei de energie dezvoltată în timpul oscilației, putem întâlni: (i) oscilații elastice, mecanice (au loc prin transformarea reciprocă a energiei cinetice în energie potențială); (ii) oscilații electromagnetice (au loc prin transformarea reciprocă a energiei electrice în energie magnetică); (iii) oscilații electromecanice (au loc prin transformarea reciprocă a energiei mecanice în energie electromagnetică).

Din punct de vedere al conservării energiei sistemului oscilant, putem clasifica oscilațiile în: (i) oscilații nedisipative, ideale sau neamortizate (energia totală se conservă); (ii) oscilații disipative sau amortizate (energia se consumă în timp); (iii) oscilații forțate sau întreținute (se furnizează energie din afara sistemului, pentru compensarea pierderilor).

#### *Mărimi caracteristice oscilațiilor periodice.*

Să notăm cu  $S(t)$  mărimea fizică ce caracterizează o oscilație. Atunci, dacă  $T$  este perioada oscilației, mărimea  $S$  are aceeași valoare la momentul  $t$  și la un moment ulterior,  $t + T$ :

$$S(t) = S(t+T)$$

Media lui  $S$  pe o perioadă se calculează prin relația:

$$\langle S \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt$$

Valoarea efectivă a lui  $S$ , ridicată la puterea a doua, este dată prin definiția:

$$S_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T S^2(t) dt$$

Oscilațiile armonice reprezintă acel tip de oscilații în care mărimile caracteristice se pot exprima prin funcții trigonometrice (sinus, cosinus) sau prin funcții exponențiale de argument complex. Acele oscilații care nu sunt armonice, se pot descompune în serii Fourier de funcții. Reamintim, de asemenea, formulele lui Euler, care vor fi utile în calculele următoare:

$$|e^{i\varphi}|^2 = 1$$

$$\rho e^{i\varphi} = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = a + ib$$

$$\rho^2 |e^{i\varphi}|^2 = \rho^2 = a^2 + b^2$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$$

Mișcarea oscilatorie armonică apare foarte des în situațiile practice. Un exemplu foarte la îndemână îl constituie bătăile inimii. Se spune că Galilei folosea bătăile inimii sale pentru a cronometra mișcările pe care le studia.

### 3.2. Mișcarea oscilatorie armonică ideală

În absența unor forțe de frecare sau de disipare a energiei, mișcarea oscilatorie este o mișcare ideală, deoarece energia totală a oscilatorului rămâne constantă în timp. Mișcarea este reversibilă, astfel că după o perioadă oscilatorul revine în poziția inițială și procesul se reia. Forța care determină revenirea oscilatorului în poziția inițială și care permite continuarea oscilației se numește *forță de revenire*. Această forță de revenire poate fi forța elastică dintr-o lamă metalică, presiunea dintr-un tub și, în general, orice forță care produce o deformare elastică.

Să considerăm un oscilator mecanic format dintr-un resort elastic și un corp punctiform, de masă  $m$ , legat la capătul liber al resortului, ca în fig.3.1.a. Dacă se pune corpul în mișcare prin intermediul unei forțe și dacă nu există frecări, sistemul va efectua o mișcare periodică în jurul poziției de echilibru, numită *oscilație ideală*.

Forța elastică din resort,  $\vec{F}_e$ , este singura forță din sistemul mecanic, așa că putem scrie formula fundamentală a dinamicii sub forma:

$$ma = -k y \quad (3.1)$$

unde  $k$  este constanta elastică a resortului, iar  $y$  este alungirea acestuia ( $y$  se numește *elongația mișcării*).

Ecuția de mișcare a corpului devine:

$$m a + k y = 0 \quad (3.2.a)$$

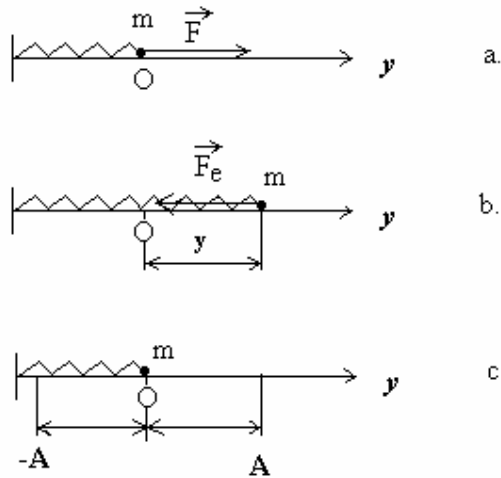


Fig. 3.1. Oscilator mecanic ideal: a) momentul inițial; b) alungirea  $y$  produce forța de revenire  $\vec{F}_e$ ; c) amplitudinea mișcării oscilatorii.

Accelerația corpului reprezintă derivata de ordinul doi la timp a vectorului deplasare, de aceea ecuația de mișcare devine:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + k y = 0 \quad (3.2.b)$$

Împărțim ecuația (3.2.b) la  $m$  și obținem:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = 0 \quad (3.3)$$

Notăm cu  $\omega_0$  pulsația proprie a oscilatorului, care este egală cu:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.4)$$

Soluțiile particulare ale ecuației diferențiale de ordinul doi (3.3) sunt funcții de forma:

$$y(t) = e^{\pm i\omega_0 t}$$

Cu ajutorul formulelor lui Euler, aceste funcții se pot scrie sub forma funcțiilor trigonometrice. Astfel, se poate arăta că soluția generală a ecuației (3.3) este de forma:

$$y(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (3.5)$$

unde  $A$  reprezintă valoarea maximă a elongației și se numește *amplitudinea* mișcării oscilatorii, iar  $\varphi_0$  este *faza inițială* a mișcării. Ambele constante de integrare,  $A$  și  $\varphi_0$ , se determină din condițiile inițiale ale mișcării (la  $t = 0$  trebuie cunoscute, de exemplu, poziția și viteza inițială).

Mărimea  $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$  se numește *faza oscilației*.

Viteza oscilatorului este prima derivată la timp a elongației și este egală cu:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (3.6)$$

Accelerația oscilatorului este prima derivată la timp a vitezei, sau a doua derivată în raport cu timpul a elongației:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 y \quad (3.7)$$

Reprezentarea mărimilor vectoriale periodice se poate realiza și prin intermediul *fazorilor*. Fazorul este un vector rotitor în sens trigonometric pozitiv într-un plan Oxy, care are viteza unghiulară  $\omega_0$ . Lungimea fazorului este egală cu modulul vectorului pe care îl reprezintă, adică fazorul este egal cu amplitudinea mișcării oscilatorii. Faza vectorului reprezentat este egală cu unghiul format de fazor cu axa orizontală, Ox. Vectorul reprezentat este egal cu proiecția fazorului pe axa verticală Oy. Fazorul din fig. 3.2 reprezintă elongația oscilatorului ideal, în diferite momente de timp.

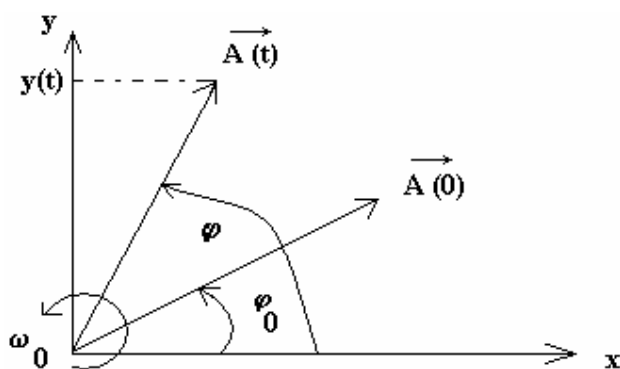


Fig. 3.2. Reprezentarea fazorială a oscilației.

Vectorul  $\overline{A(0)}$  reprezintă fazorul corespunzător momentului inițial, iar vectorul  $\overline{A(t)}$  reprezintă fazorul la momentul t. Elongatia  $y(t)$  se determină prin proiecția pe axa Oy a fazorului  $\overline{A(t)}$ :

$$y = A \sin \varphi(t)$$

unde  $\varphi(t)$  este faza oscilației,  $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$ .

Mărimile fizice caracteristice ale oscilatorului ideal pot fi reprezentate grafic în funcție de timp. Dacă faza inițială este nulă, se obțin graficele funcțiilor  $y = f(t)$ ,  $v = f(t)$  și  $a = f(t)$  din fig.3.3.

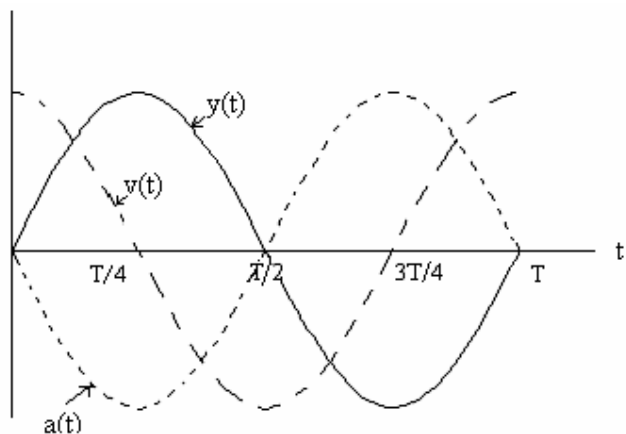


Fig. 3.3. Elongația, viteza și accelerația oscilatorului ideal în funcție de timp.

Energiile cinetică și potențială ale oscilatorului ideal sunt de forma:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (3.8)$$

$$E_p = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (3.9)$$

Se observă că energiile cinetică și potențială elastică sunt dependente de timp. Din definiția vitezei unghiulare obținem:

$$k = m \omega_0^2$$

Energia mecanică a oscilatorului ideal este suma energiilor cinetică și potențială, fiind de forma:

$$\begin{aligned} E = E_c + E_p &= \frac{1}{2}A^2\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= \frac{1}{2}k A^2 [\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)] = \frac{1}{2}k A^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Din relația (3.10) se vede că energia mecanică a oscilatorului ideal este constantă, ceea ce constituie *legea conservării energiei mecanice a oscilatorului ideal*.

În decursul oscilației ideale, energiile cinetică și potențială elastică ale oscilatorului ideal sunt variabile în timp, transformându-se una în alta, în așa fel încât suma lor să rămână constantă. În fig.3.4 sunt reprezentate energiile cinetică, potențială și totală în funcție de elongația  $y$ . Se poate observa că deși energia potențială este variabilă, fiind reprezentată de parabola din figură, totuși energia mecanică a oscilatorului ideal este constantă.

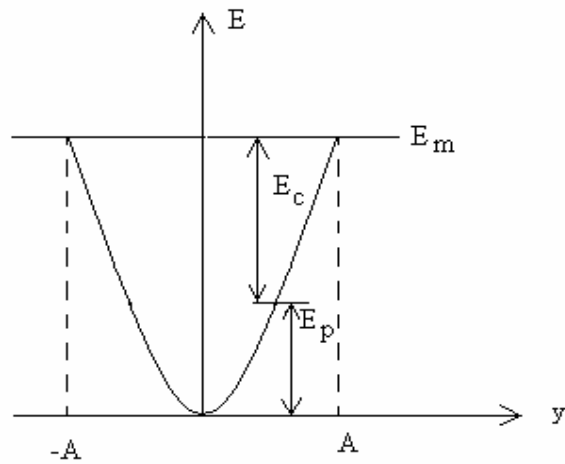


Fig.3.4. Energiile cinetică, potențială și totală în funcție de elongația oscilatorului ideal.

Conservarea energiei mecanice a oscilatorului constituie efectul direct al faptului că forțele elastice sunt forțe conservative. Caracterul oscilant al mișcării se poate constata și din transformarea periodică a energiei cinetice în energie potențială și reciproc.



### 3.3. Compunerea mișcărilor oscilatorii armonice

Pe baza legilor mișcării oscilatorii armonice ideale se pot studia mișcări oscilatorii mai complexe, care rezultă din compunerea a două sau mai multe oscilații armonice, care se desfășoară pe direcții paralele sau pe direcții perpendiculare.

#### 3.3.1. Compunerea oscilațiilor armonice paralele de aceeași pulsație

Să presupunem că un punct material de masă  $m$  este legat de două resorturi elastice, așa cum se vede în fig.3.5, fiind supus simultan la două forțe elastice pe aceeași direcție dar în sensuri diferite. Cele două resorturi elastice sunt identice, adică au aceeași constantă elastică,  $k_1 = k_2 = k$ .

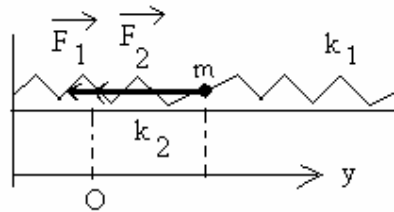


Fig.3.5. Oscilație armonică sub acțiunea a două forțe elastice paralele.

Dacă asupra punctului material s-ar exercita numai acțiunea forței elastice,  $\vec{F}_1$ , atunci elongația oscilației sale armonice, la un moment oarecare de timp, ar fi:

$$y_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}) \quad (3.11)$$

Dacă s-ar exercita numai acțiunea forței elastice  $\vec{F}_2$ , atunci elongația oscilației armonice ar fi:

$$y_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}) \quad (3.12)$$

Am notat pulsația proprie a oscilațiilor independente cu  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Atunci când asupra punctului material se exercită simultan ambele forțe elastice, mișcarea sa va fi tot o oscilație armonică, a cărei elongație este dată de suma:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \quad (3.13)$$

Fiind vorba tot de o oscilație armonică, rezultă că elongația oscilației compuse trebuie să fie de forma:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (3.14)$$

Se pune problema determinării amplitudinii rezultante,  $A$ , și a fazei inițiale,  $\varphi_0$ , a mișcării compuse. Vom utiliza metoda fazorilor pentru determinarea celor două necunoscute. Observăm în fig.

3.6. că fazorii corepunzători celor două oscilații,  $y_1(t)$  și  $y_2(t)$ , se rotesc în fază, deoarece au aceeași viteză unghiulară,  $\omega$ .

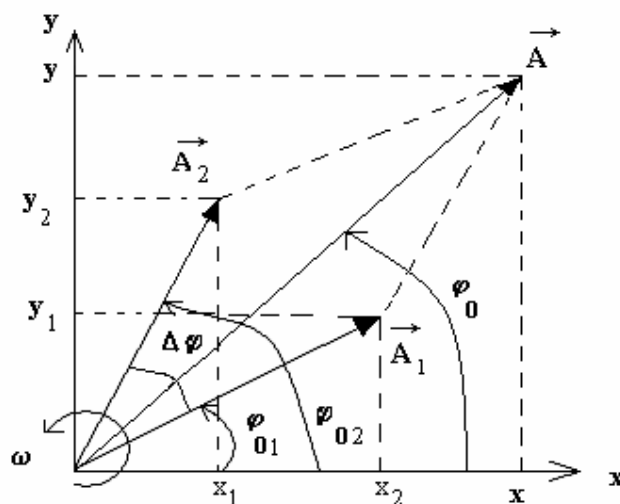


Fig. 3.6. Reprezentarea fazorială a compunerii oscilațiilor paralele.

Diferența de fază dintre cele două oscilații este independentă de timp:

$$\Delta\varphi = \varphi_2(t) - \varphi_1(t) = \omega t + \varphi_{02} - \omega t - \varphi_{01} = \varphi_{02} - \varphi_{01}$$

Cei doi oscilatori au fazorii  $\vec{A}_1$  și  $\vec{A}_2$ , aflați în fază și care formează același unghi,  $\Delta\varphi$ , în decursul rotației lor. Conform regulii de adunare a vectorilor, fazorul corespunzător amplitudinii oscilației rezultante este egal cu diagonala paralelogramului format de fazorii  $\vec{A}_1$  și  $\vec{A}_2$ :

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

Modulul vectorului  $\vec{A}$ , adică amplitudinea oscilației rezultante, se obține din formula generalizată a lui Pitagora:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})} \quad (3.15)$$

Faza inițială a oscilației rezultante este:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{y}{x} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}} \quad (3.16)$$

În practică se întâlnesc următoarele cazuri particulare ale compunerii oscilațiilor paralele de aceeași frecvență:

a). Amplitudinea rezultantă poate fi maximă,  $A = A_1 + A_2$ , dacă diferența de fază inițială este nulă,  $\Delta\varphi = 0$ . În acest caz oscilatorii sunt *în fază*.

b). Amplitudinea rezultantă poate fi minimă,  $A = |A_1 - A_2|$ , dacă diferența de fază inițială este  $\Delta\varphi = \pi$ . În acest caz oscilatorii sunt *în opoziție de fază*.

c). Amplitudinea rezultantă poate fi egală cu  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ , dacă diferența de fază inițială este  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ . În acest caz oscilațiile sunt *în cuadratură de fază*.

d). Dacă  $A_1 = A_2$  și oscilațiile sunt în opoziție de fază, atunci prin compunerea lor se obține o rezultantă egală cu zero, adică oscilația se stinge.

### 3.3.2. Compunerea oscilațiilor armonice paralele de frecvență diferită

Considerăm două oscilații armonice individuale ale punctului material de masă  $m$ . Una dintre oscilații are pulsația proprie  $\omega_1$ , iar cealaltă are pulsația proprie  $\omega_2$ . Diferența dintre cele două frecvențe de oscilație nu este însă prea mare. Elongațiile celor două oscilații armonice independente sunt de forma:

$$y_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (3.17.a)$$

$$y_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (3.17.b)$$

Punctul material este supus simultan ambelor oscilații, așa cum se poate vedea în fig. 3.7, și ne propunem să determinăm ecuația oscilației rezultante.

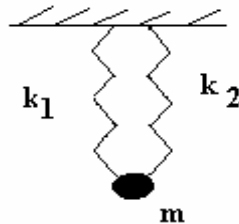


Fig. 3.7. Compunerea a două oscilații paralele de frecvențe diferite.

Elongația oscilației rezultante este de forma:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.18)$$

Pentru simplificare, folosim următoarele notații:

$$\omega_1 = \omega + \Delta\omega \quad (3.19.a)$$

$$\omega_2 = \omega - \Delta\omega \quad (3.19.b)$$

Putem afirma că diferența dintre cele două pulsații proprii,  $\Delta\omega$ , este suficient de mică în comparație cu pulsațiile proprii,  $\omega_1$  și  $\omega_2$ , deoarece cele două frecvențe proprii de oscilație sunt apropiate. Din relațiile de mai sus rezultă că:

$$2\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$$

$$2\omega = \omega_1 + \omega_2$$

Substituim relația (3.19.a) în (3.17.a) și relația (3.19.b) în (3.17.b) și obținem:

$$y_1(t) = A_1 \sin[(\omega + \Delta\omega)t + \varphi_1] \quad (3.20.a)$$

$$y_2(t) = A_2 \sin[(\omega - \Delta\omega)t + \varphi_2] \quad (3.20.b)$$

Adunând  $y_1$  și  $y_2$  din (3.20.a) și (3.20.b), pentru a calcula elongația oscilației rezultante, obținem:

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \sin[\omega t + (\Delta\omega t + \varphi_1)] + A_2 \sin[\omega t + (-\Delta\omega t + \varphi_2)]$$

Folosim formula trigonometrică  $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ , pentru a transforma relația de mai sus și obținem:

$$y = A_1 [\sin \omega t \cos(\Delta\omega t + \varphi_1) + \cos \omega t \sin(\Delta\omega t + \varphi_1)] + A_2 [\sin \omega t \cos(-\Delta\omega t + \varphi_2) + \cos \omega t \sin(-\Delta\omega t + \varphi_2)]$$

Redistribuim termenii, astfel încât să dăm ca factori comuni  $\sin \omega t$  și  $\cos \omega t$ :

$$y = [A_1 \cos(\Delta\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\Delta\omega t - \varphi_2)] \sin \omega t + [A_1 \sin(\Delta\omega t + \varphi_1) - A_2 \sin(-\Delta\omega t - \varphi_2)] \cos \omega t \quad (3.21)$$

Dezvoltăm  $\sin(\omega t + \varphi)$  din elongația rezultantă, dată de relația (3.18):

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin \omega t \cos \varphi + A \cos \omega t \sin \varphi \quad (3.22)$$

Observăm că putem identifica termenii din (3.21) și (3.22) care au, respectiv  $\sin \omega t$  și  $\cos \omega t$ , și obținem:

$$A \cos \varphi = A_1 \cos(\Delta\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\Delta\omega t - \varphi_2) \quad (3.23.a)$$

$$A \sin \varphi = A_1 \sin(\Delta\omega t + \varphi_1) - A_2 \sin(\Delta\omega t - \varphi_2) \quad (3.23.b)$$

Făcând raportul relațiilor (3.23.b) și (3.23.a) obținem faza inițială a oscilației rezultante:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin(\Delta\omega t + \varphi_1) - A_2 \sin(\Delta\omega t - \varphi_2)}{A_1 \cos(\Delta\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\Delta\omega t - \varphi_2)} \quad (3.24)$$

Observăm că faza inițială a oscilației rezultante depinde de timp.

Ridicând la pătrat relațiile (3.23.a) și (3.23.b) și adunându-le, determinăm amplitudinea oscilației rezultante:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 [\cos(\Delta\omega t + \varphi_1)\cos(\Delta\omega t - \varphi_2) - \sin(\Delta\omega t + \varphi_1)\sin(\Delta\omega t - \varphi_2)]$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[(\Delta\omega t + \varphi_1) + (\Delta\omega t - \varphi_2)]$$

unde am folosit formula trigonometrică  $\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a + b)$ .

Astfel amplitudinea oscilației rezultante este de forma:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[2\Delta\omega t + \varphi_1 - \varphi_2] \quad (3.25)$$

Așa cum se observă din relația (3.25), amplitudinea rezultată din compunerea a două oscilații paralele de frecvențe ce diferă cu  $\Delta\omega$  depinde de timp.

Putem întâlni câteva cazuri particulare:

a). Dacă  $\omega_1 = \omega_2$ , atunci  $\Delta\omega = 0$ , iar amplitudinea și faza inițială ale oscilației rezultante sunt date de relațiile (3.15) și (3.16), deduse în paragraful 3.3.1.

b). Să considerăm două oscilații care au amplitudini egale,  $A_1 = A_2 = A_0$ , și fazele inițiale nule,  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ . Dacă pulsația  $\omega_1$  diferă de pulsația  $\omega_2$  foarte puțin, atunci  $\Delta\omega$  este foarte mic, iar amplitudinea rezultantă va fi de forma:

$$A = A_0 \sqrt{1 + 1 + 2 \cos(2\Delta\omega t)} = 2A_0 \cos(\Delta\omega t)$$

unde am folosit formula trigonometrică  $1 + \cos(2a) = 2 \cos^2 a$ .

În acest caz particular ecuația elongației devine:

$$y = 2A_0 \cos(\Delta\omega t) \sin(\omega t) \quad (3.26)$$

unde  $\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ , iar  $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ .

În acest fel, ecuația elongației oscilației rezultante va fi:

$$y = 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \quad (3.27)$$

În fig. 3.8. se poate vedea graficul elongației oscilației rezultante în funcție de timp, care indică apariția fenomenului de *bătăi*. Acest fenomen constă în modularea amplitudinii oscilației. Amplitudinea,  $A$ , oscilează cu perioada:

$$T_b = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}}$$

și este reprezentată în figură prin linie punctată.  $T_b$  mai este numită și *perioada bățiilor*.

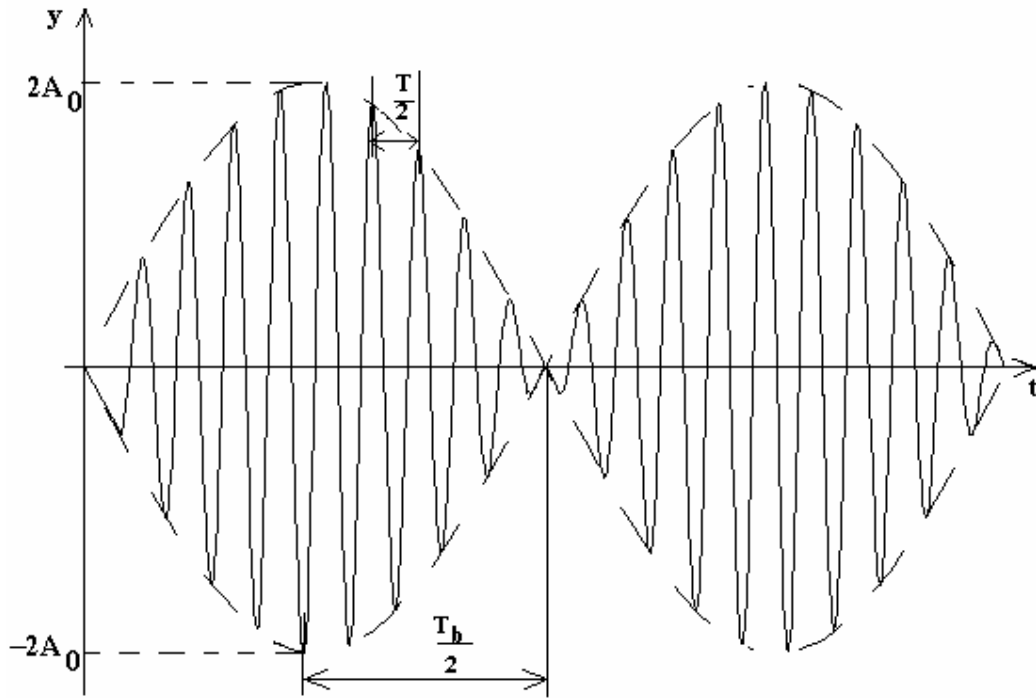


Fig. 3.8. Fenomenul de bătăi.

Faza oscilației are perioada  $T$ , mult mai mică decât  $T_b$ :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}},$$

Oscilația rezultantă este reprezentată, în fig.3.7, cu linie continuă.

Oscilația rezultantă poate fi considerată o oscilație armonică de pulsație  $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ , dar a cărei amplitudine este modulată, în sensul că se modifică periodic în timp, iar frecvența de modulație este dată de  $\nu_b = \frac{1}{T_b} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi}$ .

Acest fenomen poartă numele de *bătăi*. Perioada bătăilor este intervalul de timp între două treceri succesive ale amplitudinii rezultante prin valoarea minimă sau maximă.

### 3.3.3. Compunerea oscilațiilor perpendiculare

Considerăm un punct material de masă  $m$ , care este solicitat simultan să oscileze armonic sub acțiunea a două resorturi elastice identice legate pe două direcții perpendiculare, ca în fig. 3.9.

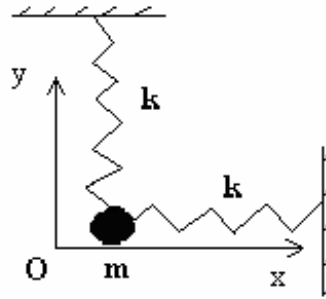


Fig. 3.9. Compunerea oscilațiilor perpendiculare

Cele două mișcări oscilatorii armonice sunt perpendiculare, având ecuațiile elongațiilor pe cele două direcții de forma:

$$x(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad (3.28.a)$$

$$y(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \quad (3.28.b)$$

Ne propunem să determinăm ecuația traiectoriei punctului material. Pentru a determina traiectoria, se elimină timpul din cele două ecuații parametrice, (3.28.a) și (3.28.b). Rescriem ecuațiile (3.28.a) și (3.28.b) sub forma:

$$\frac{x(t)}{A_1} = \sin(\omega t + \varphi_1) = \sin \omega t \cos \varphi_1 + \cos \omega t \sin \varphi_1 \quad (3.29.a)$$

$$\frac{y(t)}{A_2} = \sin(\omega t + \varphi_2) = \sin \omega t \cos \varphi_2 + \cos \omega t \sin \varphi_2 \quad (3.29.b)$$

Înmulțim ecuația (3.29.a) cu  $\cos \varphi_2$ , iar ecuația (3.29.b) cu  $\cos \varphi_1$ . După aceea, le scădem și dăm factor comun  $\cos \omega t$ , între termenii din dreapta. Vom obține:

$$\frac{x}{A_1} \cos \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \cos \varphi_1 = \cos \omega t (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_1) \quad (3.30.a)$$

Observăm că în dreapta ecuației (3.30.a) se poate folosi formula trigonometrică:

$$\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 = -\sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Apoi, înmulțim ecuația (3.29.a) cu  $\sin \varphi_2$ , iar ecuația (3.29.b) cu  $\sin \varphi_1$ . După aceea, le scădem și dăm factor comun  $\sin \omega t$ , între termenii din dreapta. Vom obține:

$$\frac{x}{A_1} \sin \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \sin \varphi_1 = \sin \omega t (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \cos \varphi_2 \sin \varphi_1) \quad (3.30.b)$$

Observăm că în dreapta ecuației (3.30.a) se poate folosi formula trigonometrică:

$$\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 = \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Se ridică la pătrat ecuațiile (3.30.a) și (3.30.b) și se adună. Se obține următoarea ecuație:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = \\ = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) \end{aligned}$$

După restrângerea termenilor, ecuația de mai sus devine:

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (3.31)$$

Ecuația (3.31) constituie ecuația traiectoriei punctului material supus simultan la două mișcări oscilatorii armonice pe direcții perpendiculare. O ecuație de această formă este cunoscută ca fiind *ecuația generalizată a elipsei*, adică ecuația unei elipse rotite față de axele de coordonate (vezi fig. 3.11). Mișcarea rezultată din compunerea a două mișcări oscilatorii armonice perpendiculare este tot o mișcare armonică.

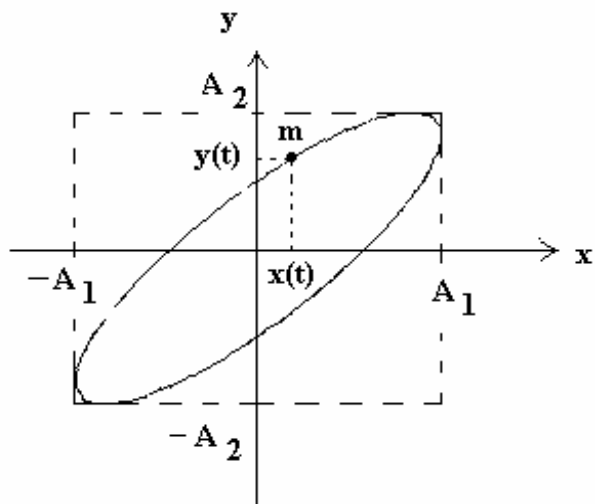


Fig. 3.11. Traietorie eliptică rotită față de axe.



În anumite cazuri, elipsa generalizată se simplifică. Aceste cazuri particulare sunt următoarele:

a). Dacă diferența fazelor inițiale este un multiplu par de  $\pi$ ,  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi$ , atunci oscilațiile sunt în fază, iar ecuația traiectoriei devine:

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2} = 0 \quad (3.32)$$

sau:

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0 \quad (3.33)$$

În acest caz, oscilația se desfășoară de-a lungul unei drepte de ecuație

$$y = \frac{A_2}{A_1}x \quad (3.34)$$

Această oscilație se desfășoară de-a lungul primei diagonale a amplitudinilor, (vezi fig. 3.12). Amplitudinea mișcării oscilatorii este dată de formula lui Pitagora:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad (3.35)$$

Ecuația elongației mișării rezultante este de forma:

$$s(t) = A \sin(\omega t + \varphi_1)$$

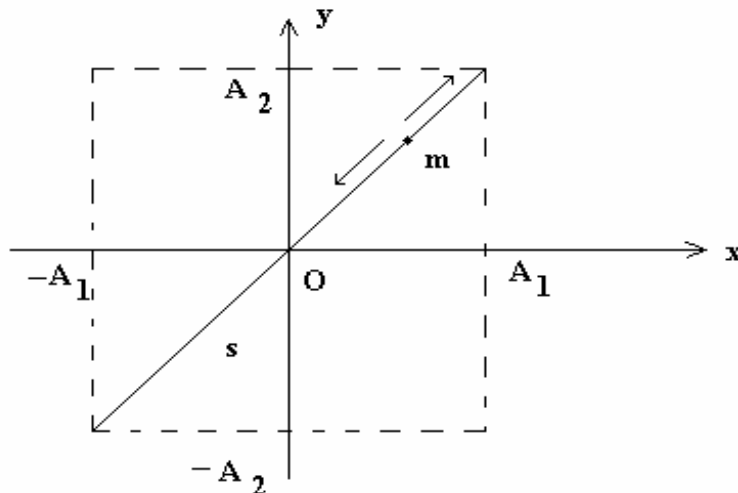


Fig. 3.12. Traiectorie particulară în cazul compunerii oscilațiilor perpendiculare în fază,

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi.$$

b). Dacă diferența fazelor inițiale este un multiplu impar de  $\pi$ , de forma  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\pi$ , oscilațiile sunt în opoziție de fază, iar ecuația traiectoriei devine:

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 + 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2} = 0 \quad (3.36)$$

sau:

$$\left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0 \quad (3.37)$$

În acest caz, oscilația se desfășoară de-a lungul unei drepte de ecuație:

$$y = -\frac{A_2}{A_1}x \quad (3.38)$$

Această oscilație se desfășoară pe cea de-a doua diagonală a amplitudinilor, (vezi fig.3.10). Amplitudinea ei este dată de relația (3.35).

c). Dacă diferența fazelor inițiale este de forma  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ , adică este un multiplu de  $\frac{\pi}{2}$ , atunci oscilațiile sunt în cuadratură. Ecuația (3.31) devine:

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 = 1 \quad (3.39)$$

Elipsa care descrie traiectoria particulei nu mai este rotită față de axele de coordonate (vezi fig.3.12).

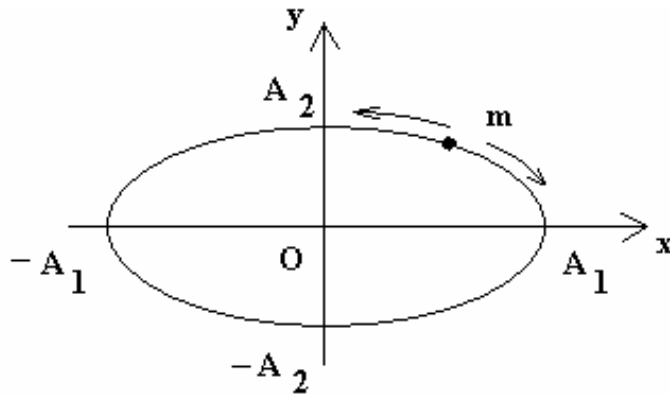


Fig.3.12. Traiectoria rezultată din compunerea a două oscilații perpendiculare în cuadratură de fază,

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\frac{\pi}{2}.$$

Mișcarea punctului material se desfășoară pe elipsă, într-un sens sau în altul.

d). Un caz particular de traiectorie eliptică este traiectoria circulară, care se obține dacă cele două oscilații au amplitudine egală,  $A_1 = A_2 = A_0$ , și sunt în cuadratură de fază,  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ . În acest caz, ecuația traiectoriei punctului material devine:

$$\left(\frac{x}{A_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_0}\right)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = A_0^2$$

Mișcarea punctului material este circulară, cercul având raza  $A_0$ .

Reciproc, putem afirma că orice mișcare circulară se poate descompune în două mișcări oscilatorii armonice perpendiculare, de amplitudini egale, aflate în cuadratură de fază,  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ . Acest rezultat al compunerii, respectiv al descompunerii a două oscilații armonice perpendiculare are o importanță deosebită în fizică.

### 3.4. Mișcarea oscilatorie amortizată

Sistemele oscilante reale sunt supuse unor forțe de frânare, sau de disipare a energiei pe care-o au la începutul mișcării. Acea parte a energiei ce se pierde prin frecare se transformă în căldură. Amplitudinea mișcării oscilatorii amortizate este scăzătoare în timp. Un caz interesant de forțe de frânare îl constituie *forțele proporționale cu viteza de oscilație*. Modulul unei forțe proporționale cu viteza de mișcare și opusă acesteia se poate scrie sub forma:

$$F_f = -\rho v \quad (3.40)$$

unde  $\rho$  este *coeficientul de rezistență mecanică*.

Rezultanta forțelor la care este supus un sistem fizic format dintr-un resort elastic de constantă elastică  $k$  și un punct material, de masă  $m$ , este:

$$ma = -ky - \rho v \quad (3.41)$$

Dacă împărțim prin  $m$  și ținem cont că viteza este prima derivată la timp a elongației  $y$ , iar accelerația este a doua derivată la timp a acesteia, obținem ecuația diferențială:

$$\ddot{y} + \frac{\rho}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = 0 \quad (3.42)$$

Această relație constituie ecuația de mișcare a sistemului ce efectuează oscilații amortizate. Pentru simplificarea calculelor, facem următoarele notații:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.43.a)$$

$$2\beta = \frac{\rho}{m} \quad (3.43.b)$$

unde  $\omega_0$  reprezintă pulsația proprie a oscilatorului ideal, iar  $\beta$  se numește *coeficient de amortizare*.

Cu aceste notații ecuația de mișcare (3.42) devine:

$$\ddot{y} + 2\beta \dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad (3.44)$$

Ecuația de mișcare, scrisă sub forma (3.44), este o ecuație diferențială de ordinul doi. Soluțiile ecuației (3.44) sunt de forma generală:

$$y(t) = e^{rt} \quad (3.45)$$

Înlocuim această soluție în ecuația (3.44) și obținem *ecuația caracteristică a ecuației diferențiale*:

$$r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0 \quad (3.46)$$

Ecuația caracteristică, fiind o ecuație de gradul doi în  $r$ , are soluții de forma:

$$r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (3.47)$$

În funcție de valorile coeficientului de amortizare  $\beta$ , în raport cu pulsația proprie  $\omega_0$ , deosebim mai multe cazuri particulare:

a). Dacă forța de amortizare este mare, încât are loc relația  $\beta > \omega_0$ . În acest caz, mărimea de sub radicalul din expresia (3.47) este pozitivă, deci soluțiile ecuației (3.46) sunt numere reale. Elongația mișcării amortizate corespunzătoare acestui caz este de forma:

$$y(t) = C_1 e^{-\beta t} e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\beta t} e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \quad (3.48)$$

Constantele de integrare  $C_1$  și  $C_2$  se determină din condițiile inițiale ale mișcării, fiind numere reale. Mișcarea descrisă de ecuația (3.48) este *neperiodică*, așa cum se vede în fig. 3.13. Elongația tinde la zero când timpul tinde la infinit, fără ca punctul material să oscileze.

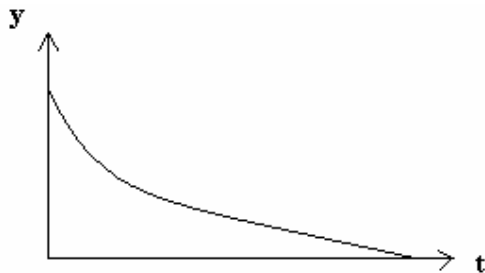


Fig. 3.13. Elongația mișcării cu forță de amortizare mare,  $\beta > \omega_0$ .

b). Dacă există egalitate între coeficientul de amortizare  $\beta$  și pulsația proprie  $\omega_0$ , atunci ecuația (3.46) are o singură soluție reală:  $r = -\beta$ . În acest caz, ecuația elongației punctului material este de forma:

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\beta t} \quad (3.49)$$

Această mișcare este de asemenea neperiodică, fiind numită *mișcare aperiodică critică*. Elongația, având un singur maxim, tinde asimptotic la zero, dar fără ca punctul material să efectueze oscilații elastice.

c) Dacă forțele de amortizare sunt slabe, atunci  $\beta < \omega_0$ . În acest caz soluțiile ecuației (3.46) sunt numere complexe. Facem notația:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Mărimea  $\omega$  se numește *pseudo-pulsația oscillatorului amortizat*, valoarea ei fiind mai mică decât pulsația proprie a sistemului ideal liber,  $\omega_0$ .

Pentru acest caz particular, soluțiile ecuației caracteristice (3.46) devin:

$$r_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \pm i\omega \quad (3.50)$$

Ecuția elongației oscilatorului amortizat este de forma:

$$y(t) = C_1 e^{-\beta t} e^{i\omega t} + C_2 e^{-\beta t} e^{-i\omega t} \quad (3.51)$$

Folosind formulele lui Euler, ecuația (3.51) se poate transforma, devenind de forma:

$$y(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.52)$$

Ecuția (3.52) constituie *elongația oscilatorului armonic amortizat* în funcție de timp. Am observat că pulsația oscilației amortizate  $\omega$  este mai mică decât pulsația proprie  $\omega_0$ . Aceasta înseamnă că *pseudo-perioada* mișcării oscilatorii amortizate,  $T$ , este mai mare decât perioada pulsației proprii,  $T_0$ , a oscilatorului ideal,  $T > T_0$ . Constantele de integrare din ecuația (3.52) sunt  $A$  și  $\varphi$ , ele fiind determinate din condițiile inițiale ale mișcării. Ecuția (3.52) se poate interpreta astfel:

Considerăm amplitudinea oscilației amortizate ca fiind o funcție de timp:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} \quad (3.53)$$

Relația (3.53) indică faptul că amplitudinea este descrescătoare în timp. Astfel, ecuația elongației oscilatorului amortizat devine:

$$y(t) = A(t) \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.54)$$

În fig. 3.14 sunt reprezentate funcțiile  $y(t)$  și  $A(t)$ , conform cu relațiile (3.54) și (3.53).

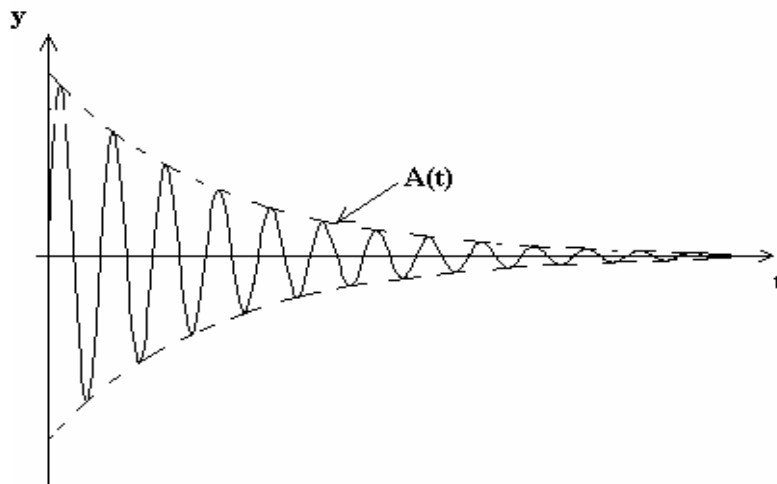


Fig. 3.14. Elongația și amplitudinea oscilatorului armonic amortizat în funcție de timp.

Observăm că oscilația amortizată este *modulată în amplitudine*. Elongația tinde la zero când timpul tinde la infinit, punctul material oscilând în jurul poziției de echilibru cu o amplitudine din ce în ce mai mică.

Descreșterea amplitudinii mișcării oscilatorii amortizate este caracterizată de mărimea numită *decrement logaritm*. Decrementul logaritm este egal cu logaritmul natural al raportului dintre două amplitudini succesive:

$$\Delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T \quad (3.55)$$

Viteza oscilatorului armonic amortizat este prima derivată la timp a elongației:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = -A_0 \beta e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) + A_0 \omega e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.56)$$

Energia totală a oscilatorului armonic amortizat este o funcție de timp, fiind egală cu:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k A_0^2 e^{-2\beta t} \quad (3.57)$$

Comparând vitezele de scădere în timp ale amplitudinii și energiei totale în cazul oscilatorului amortizat, așa cum se vede în fig.3.15, putem constata că energia mecanică scade mult mai repede decât amplitudinea mișcării.

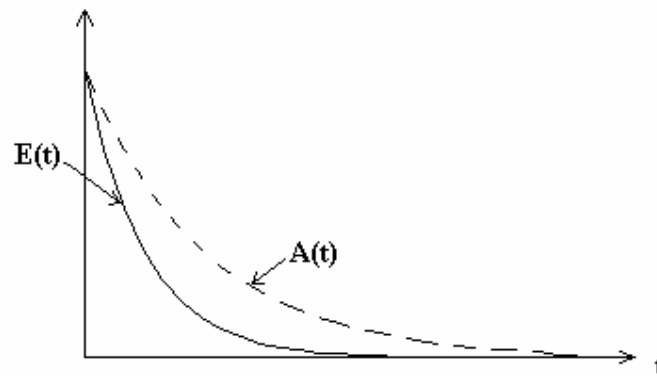


Fig.3.15. Dependența de timp a energiei mecanice și a amplitudinii oscilatorului amortizat.

Timpul caracteristic pentru scăderea energiei mecanice a oscilatorului amortizat se numește *timp de relaxare*, notat  $\tau$ . Timpul de relaxare  $\tau$  este intervalul de timp după care energia mecanică scade de  $e = 2.718$  ori ( $\ln e = 1$ ):

$$\frac{E(t)}{E(t + \tau)} = 2.718 = e \quad (3.58)$$

Dacă rezolvăm ecuația (3.58) pentru a calcula timpul de relaxare  $\tau$ , obținem:

$$e^{-2\beta\tau} = e^{\frac{\frac{1}{2}kA_0^2e^{-2\beta t}}{\frac{1}{2}kA_0^2e^{-2\beta(t+\tau)}}} = e \quad 2\beta\tau = 1$$

$$\tau = \frac{1}{2\beta} = \frac{m}{\rho} \quad (3.59)$$

Relația (3.59) definește timpul de relaxare.

În final, accentuăm asupra faptului că, dacă forța de frânare nu este de forma dată de relația (3.40), adică nu este proporțională cu viteza, atunci soluția (3.53),  $A(t) = A_0e^{-\beta t}$ , nu mai este valabilă. Amplitudinea oscilatorului amortizat în funcție de timp,  $A = f(t)$ , poate avea o altă formă matematică.

### 3.5. Analogie între oscilațiile mecanice și cele electromagnetice

Examinând oscilațiile elastice (ale unui sistem format dintr-un resort elastic și un corp punctiform) și oscilațiile electromagnetice (dintr-un *circuit serie RLC de curent alternativ*), constatăm o serie de asemănări (similitudini). Aceste asemănări au condus la stabilirea unor corespondențe între mărimile electrice și cele mecanice, adică la stabilirea unor analogii între aceste mărimi. Cunoașterea *analogiilor dintre mărimile electrice și cele mecanice* permite transpunerea rezultatelor obținute pentru oscilațiile elastice armonice (ideale sau amortizate) la cazul oscilațiilor electrice. Considerăm un circuit serie RLC, format dintr-un rezistor cu rezistența electrică R, o bobină ideală cu inductanța L, și un condensator de capacitate electrică C (vezi fig. 3.16).

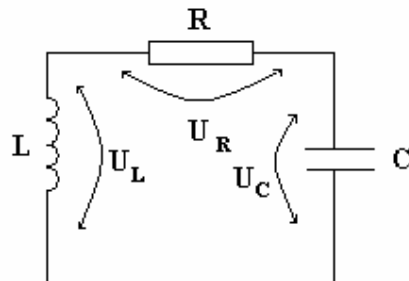


Fig. 3.16. Circuit RLC parcurs de un curent electric variabil în timp.

Considerăm că bobina constituie secundarul unui transformator. În bobină se induce o tensiune electromotoare,  $u_L$ , prin inducție electromagnetică între *primarul și secundarul* transformatorului. Apoi alimentarea electrică a transformatorului se întreprinde. Fie  $i(t)$  *intensitatea instantanee* a curentului electric



ce se stabilește în circuitul RLC. Legea lui Faraday a *inducției electromagnetice* ne dă relația dintre tensiunea la bornele bobinei,  $u_L(t)$ , și intensitatea  $i(t)$  din circuitul RLC:

$$u_L(t) = -L \frac{di(t)}{dt} \quad (3.60)$$

Legea a doua a lui Kirchhoff, aplicată la circuitul RLC pentru *tensiunile instantanee*, este de forma:

$$u_L(t) = u_C(t) + u_R(t) \quad (3.61)$$

Tensiunile instantanee din relația (3.61) sunt:

$$1. \quad u_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad (3.62)$$

unde  $Q$  reprezintă sarcina electrică acumulată de condensator.

$$2. \quad u_R = R i(t) \quad (3.63)$$

Înlocuind relațiile (3.60), (3.62) și (3.63) în ecuația (3.61), aceasta din urmă devine:

$$-L \frac{di}{dt} = R i + \frac{Q}{C} \quad (3.64)$$

Dacă derivăm la timp ecuația (3.64), obținem:

$$-L \frac{d^2 i}{dt^2} = R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} \quad (3.65)$$

După cum știm, intensitatea curentului electric reprezintă derivata în raport cu timpul a sarcinii electrice  $Q$   $\left( i = \frac{dQ}{dt} \right)$ . Atunci, ecuația (3.65) se mai poate scrie și sub forma:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0 \quad (3.65)$$

Să comparăm ecuația (3.65) cu ecuația de mișcare a oscilatorului amortizat, (3.42). Vom observa că cele două ecuații sunt de aceeași formă, în sensul că "variabila" ecuațiilor este prezentă împreună cu primele două derivate la timp. (derivatele de ordinul unu și doi). Similitudinile dintre cele două tipuri de oscilații sunt prezentate în Tabelul 3.1. Astfel, putem observa că toate mărimile fizice corespunzătoare oscilației electromagnetice au un corespondent în mărimi corespunzătoare oscilației elastice. Folosind analogia dintre oscilațiile amortizate ale resortului elastic și oscilațiile electromagnetice amortizate din circuitul RLC, se poate scrie intensitatea instantanee a curentului electric din circuit, care este dată de relația:

$$i(t) = I_{\max} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.66)$$

unde pseudo-pulsăția oscilației este  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ .

Tabelul 3.1. Analogie între oscilațiile electromagnetice și cele mecanice

Oscilații electromagnetice		Oscilații elastice	
Mărimea electrică	Simbol	Mărimea mecanică	Simbol
Intensitatea instantanee a curentului electric	$i(t)$	Elongația mișcării oscilatorii armonice	$y(t)$
Inductanța bobinei	$L$	Masa oscilatorului elastic	$m$
Rezistența electrică	$R$	Rezistența mecanică	$\rho$
Inversul capacității electrice	$\frac{1}{C}$	Constanta elastică	$k$
Coeficientul de amortizare	$\frac{R}{L} = 2\beta$	Coeficientul de amortizare	$\frac{\rho}{m} = 2\beta$
Pulsația proprie de oscilație	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	Pulsația proprie de oscilație	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
Factorul de calitate	$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$	Factorul de calitate	$Q = \frac{1}{r} \sqrt{mk}$

În fig. 3.17 se prezintă intensitatea instantanee a curentului electric din circuit și amplitudinea oscilațiilor sale în funcție de timp.

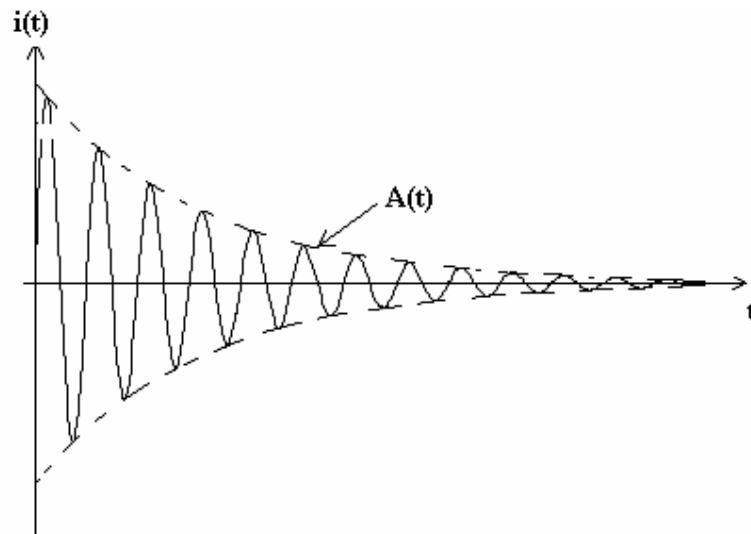


Fig. 3.17. Intensitatea instantanee a curentului electric din circuitul oscilant amortizat.

Așa cum se observă, amplitudinea oscilațiilor curentului electric este o funcție de timp, dată de relația:

$$A(t) = I_{\max} e^{-\frac{R}{2L}t} \quad (3.67)$$

Comparând relațiile (3.53) și (3.67), observăm că și în cazul amplitudinii cele două tipuri de oscilații (elastice și electromagnetice) sunt similare.

### 3.6. Oscilații forțate. Rezonanța

Să considerăm un oscilator mecanic format dintr-un resort elastic și un corp de dimensiuni neglijabile. Datorită forței de frecare, energia mecanică a oscilatorului se consumă în timp, astfel încât oscilația este amortizată, așa cum am văzut în paragraful 3.4. Pentru a *întreține* mișcarea oscilatorie, trebuie să se aplice forțe exterioare (numite *forțe de forțare*), care să compenseze pierderile de energie din sistem. În acest caz, punctul material va efectua o mișcare oscilatorie *forțată*. Dintre tipurile de forțe de forțare (sau *perturbatoare*) ce se pot aplica sistemului oscilant, un caz interesant pentru aplicațiile practice este cel în care forțele perturbatoare sunt periodice. O astfel de forță perturbatoare se poate scrie sub forma:

$$F_p = F_0 \sin \omega_p t \quad (3.68)$$

În acest caz, ecuația de mișcare a *oscilatorului armonic forțat* este de forma:

$$m \ddot{y} = -ky - \rho \dot{y} + F_0 \sin \omega_p t \quad (3.69)$$

Folosind notațiile (3.43.a) și (3.43.b), care introduc pulsația proprie a sistemului și coeficientul de amortizare, obținem ecuația de mișcare a oscilatorului forțat (sau întreținut):

$$\ddot{y} + 2\beta \dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \sin \omega_p t \quad (3.70)$$

Experiența arată că o mișcare periodică întreținută prezintă un *regim tranzitoriu*, după trecerea căruia se instalează *regimul permanent*. Regimul tranzitoriu este de scurtă durată, iar regimul permanent se manifestă prin *oscilații întreținute*.

Din punct de vedere matematic, soluția generală a ecuației (3.70) se compune din soluția *ecuației omogene* (adică ecuația fără termenul forță perturbatoare) plus o *soluție particulară* a ecuației complete. De aceea, putem scrie soluția ecuației (3.70), a mișcării oscilatorii forțate, sub forma:

$$y(t) = y_o(t) + y_p(t) \quad (3.71)$$

Termenul  $y_o(t)$  reprezintă soluția ecuației omogene, fiind de forma (3.52). Într-adevăr, observăm că fără termenul din dreapta, ecuația (3.70) ar fi reprezentat ecuația de mișcare oscilatorie amortizată,

descrisă de ecuația (3.44). De aceea,  $y_o(t)$  este o soluție a ecuației omogene și reprezintă oscilațiile amortizate:

$$y_o(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

Această soluție descrie regimul tranzitoriu de oscilație. După trecerea unui anumit timp, regimul tranzitoriu încetează deoarece amplitudinea,  $A_0 e^{-\beta t}$ , se reduce semnificativ, tinzând asimptotic la zero.

Soluția particulară  $y_p(t)$  din (3.71) este o soluție a ecuației complete, fiind de forma termenului din dreapta al ecuației (3.70):

$$y_p(t) = A_p \sin(\omega_p t - \varphi) \quad (3.73)$$

Relația (3.73) descrie regimul permanent al oscilatorului forțat. După instalarea regimului permanent, amplitudinea oscilațiilor întreținute rămâne constantă, iar pulsația oscilatorului devine egală cu cea a forței perturbatoare. Într-adevăr, se observă și experimental faptul că pulsația regimului permanent este egală cu pulsația forței perturbatoare. Oscilatorul întreținut adoptă frecvența forței perturbatoare.

Soluția  $y_p(t)$  dată de (3.73) conține două constante de integrare,  $A_p$  și  $\varphi$ . Acestea vor fi determinate din condiția ca soluția (3.73) să verifice ecuația de mișcare (3.70). Pentru a verifica, derivăm  $y_p(t)$  la timp și înlocuim apoi în ecuația (3.70). Obținem ecuația:

$$-A_p \omega_p^2 \sin(\omega_p t - \varphi) + 2\beta A_p \omega_p \cos(\omega_p t - \varphi) + A_p \omega_0^2 \sin(\omega_p t - \varphi) = f \sin \omega_p t \quad (3.74)$$

unde am folosit notația  $f = \frac{F_0}{m}$ .

Ecuația (3.74) trebuie să fie verificată în orice moment de timp, deci și în momentele particulare în care  $\omega_p t = \frac{\pi}{2}$  și  $\omega_p t = 0$ . Pentru aceste momente particulare de timp ecuația (3.74) devine:

$$-A_p \omega_p^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + 2\beta A_p \omega_p \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + A_p \omega_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = f \sin \frac{\pi}{2} \quad (3.75.a)$$

$$-A_p \omega_p^2 \sin(-\varphi) + 2\beta A_p \omega_p \cos(-\varphi) + A_p \omega_0^2 \sin(-\varphi) = f \sin 0 \quad (3.75.b)$$

Folosind relații trigonometrice de reducere la primul cadran, cele două ecuații de mai sus se pot scrie sub forma:

$$A_p (\omega_0^2 - \omega_p^2) \cos \varphi + 2\beta A_p \omega_p \sin \varphi = f \quad (3.76.a)$$

$$-A_p (\omega_0^2 - \omega_p^2) \sin \varphi + 2\beta A_p \omega_p \cos \varphi = 0 \quad (3.76.b)$$

Din ecuația (3.76.b) se poate obține expresia matematică ce determină faza inițială a oscilației întreținute:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega_p}{(\omega_0^2 - \omega_p^2)} \quad (3.77)$$

Dacă se ridică la pătrat ecuațiile (3.76.a) și (3.76.b) și se adună, se obține amplitudinea oscilației întreținute, sub forma:

$$A_p = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_p^2)^2 + (2\beta\omega_p)^2}} \quad (3.78)$$

Observăm că amplitudinea oscilației permanente este constantă în timp, depinde de pulsația  $\omega_p$  a forței ce o întreține, dar nu depinde de condițiile inițiale. De asemenea, observăm că există un defazaj între forța  $F_p$  și elongația oscilației întreținute  $y_p(t)$ . Oscilația permanentă este în urmă cu faza  $\varphi$  față de forța  $F_p$ . Trebuie subliniat, de asemenea, faptul că frecvența de oscilație a regimului permanent este egală cu frecvența forței exterioare,  $F_p$ , așa cum rezultă și experimental.

### 3.6.1. Rezonanța

Așa cum am văzut în paragraful anterior, după stabilirea regimului permanent al oscilației întreținute, frecvența de oscilație este egală cu frecvența  $\nu_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$  a forței perturbatoare. Sistemul oscilant adoptă pulsația forței perturbatoare, care este diferită de pulsația sa proprie de oscilație ca sistem liber,  $\omega_0$ .

Analizând oscilația forțată, putem constata experimental faptul că prin variația pulsației forței de forțare se obține variația amplitudinii oscilațiilor forțate. O funcție matematică, așa cum este  $A_p = f(\omega_p)$  dată de relația (3.78), prezintă valori maxime (sau minime). Dacă se derivează amplitudinea  $A_p$  la frecvența  $\omega_p$ , se constată că derivata se anulează pentru o anumită valoare a pulsației forței perturbatoare,  $\omega_{rez}$ , pentru care amplitudinea oscilației forțate este maximă. Această valoare maximă a amplitudinii oscilației forțate caracterizează fenomenul numit rezonanță.

*Rezonanța* este fenomenul fizic de apariție a maximului amplitudinii oscilației întreținute. Pentru a determina maximul amplitudinii oscilației forțate, mai întâi calculăm derivata funcției  $A_p = f(\omega_p)$  la frecvența  $\omega_p$ .

$$\begin{aligned} \frac{dA_p}{d\omega_p} &= f \frac{d}{d\omega_p} \left\{ \left[ (\omega_0^2 - \omega_p^2)^2 + 4\beta^2 \omega_p^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} f \left[ (\omega_0^2 - \omega_p^2)^2 + 4\beta^2 \omega_p^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \left\{ 2(\omega_0^2 - \omega_p^2)(-2\omega_p) + 8\beta^2 \omega_p \right\} \end{aligned}$$

Punem condiția de anulare a derivatei de mai sus:

$$\begin{aligned} \frac{dA_p}{d\omega_p} &= 0 \\ 4\omega_p(-\omega_0^2 + \omega_p^2 + 2\beta^2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.79)$$

Soluția ecuației (3.79) reprezintă *frecvența de rezonanță* a sistemului oscilant întreținut, dependentă de pulsația proprie a oscilatorului  $\omega_0$  și de coeficientul de amortizare  $\beta$ :

$$\omega_p = \omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (3.80)$$

Amplitudinea maximă, sau *amplitudinea de rezonanță*, a sistemului oscilant întreținut se calculează înlocuind frecvența de rezonanță, dată de relația (3.80), în formula (3.78):

$$\begin{aligned} A_{rez} = A_{max} &= \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{rez}^2)^2 + 4\beta^2 \omega_{rez}^2}} = \\ &= \frac{f}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Din relația (3.80) observăm că, dacă  $\beta = 0$  (adică în absența forțelor disipative), frecvența de rezonanță,  $\omega_{rez}$ , coincide cu frecvența proprie  $\omega_0$  a sistemului oscilant. În fig. 3.18 sunt reprezentate mai multe grafice ale amplitudinii  $A_p$ , în funcție de pulsația  $\omega_p$ , conform ecuației (3.78), pentru mai multe valori ale coeficientului de amortizare  $\beta$ . Putem vedea că în absența frecărilor, amplitudinea de rezonanță tinde asimptotic la infinit. Cu cât valoarea coeficientului de amortizare  $\beta$  este mai mare, cu atât valoarea maximă a amplitudinii regimului permanent scade. Se observă că la forțe de frecare mai mari, frecvența de rezonanță ia valori mai mici. Sistemul fizic aflat la rezonanță oscilează cu amplitudine maximă. Deși, din punct de vedere fizic, este ideal să amplificăm la maxim o oscilație armonică, totuși în practică trebuie evitate situațiile în care frecvența forței de întreținere coincide cu frecvența proprie a oscilatorului, deoarece în acest caz amplitudinea tinde la infinit. Rezonanța mecanică are multiple aplicații în tehnică.

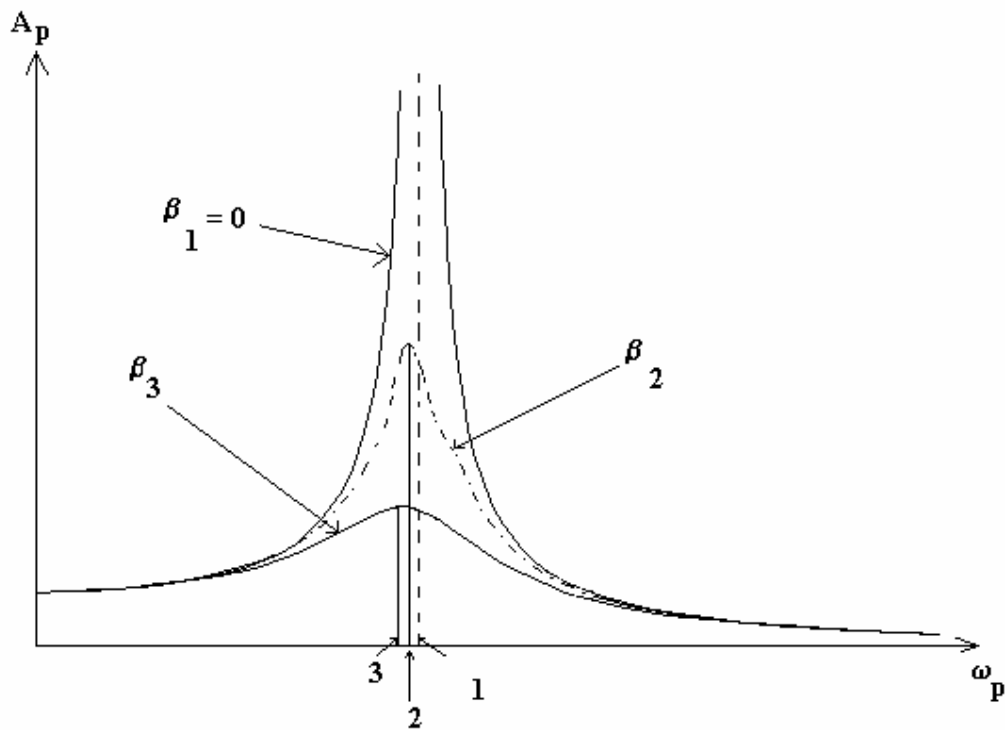


Fig. 3.18. Curbe de rezonanță pentru diferite valori ale coeficientului de amortizare: **1**  $\beta_1 = 0$ ; **2**

$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta_2^2} ; \quad \mathbf{3} \quad \omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta_3^2} , \beta_3 > \beta_2 .$$

Astfel, în acest paragraf am constatat că în cazul oscilațiilor întreținute, sau forțate, forța exterioară produce un lucru mecanic ce compensează pierderile de energie din sistemul oscilant. În paragraful următor vom vedea cum se caracterizează din punct de vedere energetic oscilațiile întreținute.

În ceea ce privește faza inițială  $\varphi$  a oscilației permanente, se observă că oscilația este defazată cu faza  $\varphi$  în urma forței de forțare. Se constată, de asemenea, că dacă valoarea lui  $\beta$  scade, atunci  $|\varphi|$  se apropie de valoarea  $\frac{\pi}{2}$ , așa cum se poate vedea în fig. 3.19.

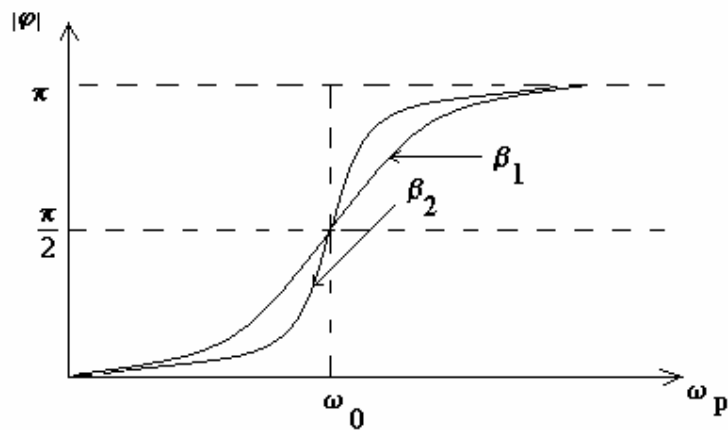


Fig. 3.19. Variația modulului fazei inițiale a oscilației permanente în funcție de valorile coeficientului de amortizare  $\beta$ .  $\beta_2 < \beta_1$ .

### 3.6.2. Considerații energetice ale oscilațiilor forțate

În continuare vom defini câteva mărimi fizice care caracterizează *transferul energiei mecanice* în sistemul ce efectuează oscilații forțate, sau întreținute.

1. *Puterea instantanee absorbită* de sistemul oscilant întreținut reprezintă derivata la timp a lucrului mecanic efectuat de forța de forțare.

Expresia matematică a puterii instantanee absorbite este:

$$P_a(t) = \frac{dL_a}{dt} = \frac{F_p(t) dy}{dt} = F_p(t) \dot{y}(t) = F_p(t) v(t) \quad (3.82)$$



unde elongația este  $y(t) = A_p \sin(\omega_p t - \varphi)$ ,

iar viteza este  $v(t) = A_p \omega_p \cos(\omega_p t - \varphi)$ .

Atunci puterea instantanee absorbită, dată de relația (3.82), devine:

$$P_a(t) = F_0 \sin(\omega_p t) A_p \omega_p \cos(\omega_p t - \varphi) \quad (3.83)$$

2. *Puterea medie absorbită* în decursul unei perioade reprezintă integrala pe o perioadă a puterii instantanee absorbite  $P_a(t)$ :

$$\langle P_a \rangle = \overline{P_a} = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} P_a(t) dt = \frac{F_0 A_p \omega_p}{T_p} \int_0^{T_p} \sin \omega_p t \cos(\omega_p t - \varphi) dt \quad (3.84)$$

Se poate arăta că integrala din relația (3.84) este egală cu:

$$\int_0^{T_p} \sin \omega_p t \cos(\omega_p t - \varphi) dt = \frac{1}{2} T_p \sin \varphi$$

Astfel, puterea medie absorbită pe durata unei perioade este de forma:

$$\langle P_a \rangle = \overline{P_a} = \frac{F_0 A_p \omega_p}{T_p} \frac{1}{2} T_p \sin \varphi = \frac{F_0 A_p \omega_p}{2} \sin \varphi \quad (3.85)$$

Folosind definiția (3.77) a fazei inițiale a oscilației întreținute:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \frac{2\beta \omega_p}{\omega_0^2 - \omega_p^2}$$

obținem:

$$\sin \varphi = \frac{2\beta \omega_p}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_p^2)^2 + 4\beta^2 \omega_p^2}}$$

Dacă ținem cont de relația (3.78) care definește amplitudinea oscilației întreținute, obținem puterea medie absorbită într-o perioadă sub forma:

$$\langle P_a \rangle = \overline{P_a} = \beta m A_p^2 \omega_p^2 \quad (3.86)$$

3. *Puterea instantanee disipată* sub formă de căldură de către forța de frecare reprezintă derivata la timp a lucrului mecanic efectuat de forța de frecare, adică:

$$P_d(t) = -\frac{dL_f}{dt} = -\frac{F_f dy}{dt} = \rho \left( \ddot{y} \right)^2 = 2\beta m \left( \ddot{y} \right)^2 = 2\beta m A_p^2 \omega_p^2 \cos^2(\omega_p t - \varphi) \quad (3.87)$$

4. *Puterea medie disipată într-o perioadă* reprezintă integrala pe o perioadă a puterii instantanee disipate:

$$\langle P_d(t) \rangle = \overline{P_d} = 2\beta m A_p^2 \omega_p^2 \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} \cos^2(\omega_p t - \varphi) dt = \beta m A_p^2 \omega_p^2 \quad (3.88)$$

În relația (3.88) am ținut cont de faptul că integrala este egală cu  $T_p/2$ .

Analizând relațiile (3.86) și (3.88), constatăm că în regim permanent puterea medie absorbită pe o perioadă este egală cu puterea medie disipată sub formă de căldură în aceeași perioadă de timp:

$$\overline{P_d} = \overline{P_a} = \beta m A_p^2 \omega_p^2 \quad (3.89)$$

În fig. 3.20 sunt reprezentate grafic puterile medii absorbită și disipată în funcție de pulsația forței de forțare,  $\omega_p$ . Puterea maximă atinsă,  $P_{\max} = \frac{F_0^2}{4\beta m}$ , se obține în cazul egalității  $\omega_p = \omega_0$ . În acest caz, puterea medie absorbită este egală cu puterea medie disipată, ambele puteri fiind maxime. Trebuie remarcat, de asemenea, faptul că maximele puterilor medii se obțin în cazul  $\omega_p = \omega_0$ , pe când amplitudinile maxime se ating în cazul  $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ .

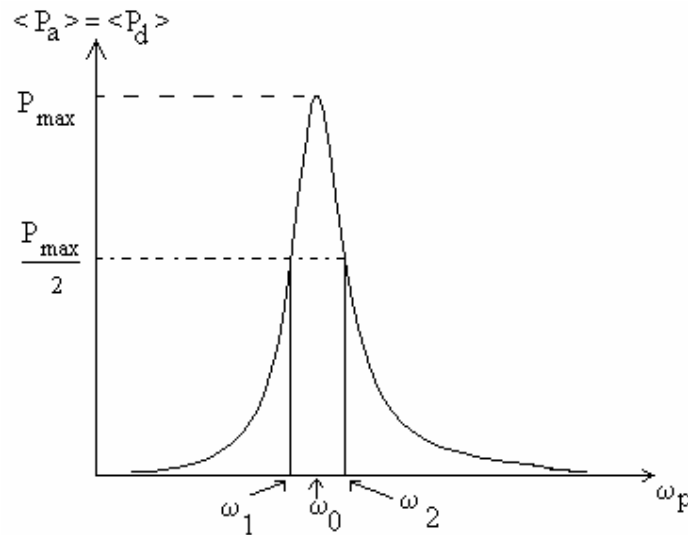


Fig. 3.20. Puterile medii absorbită și disipată în funcție de  $\omega_p$ .

5. *Puterea efectivă* reprezintă jumătate din puterea maximă, adică:

$$P_{ef} = \frac{P_{\max}}{2} = \frac{F_0^2}{8\beta m} \quad (3.90)$$

Observăm în fig3.19 că puterea efectivă dată de relația (3.90) este atinsă pentru două valori ale pulsației,  $\omega_1$  și  $\omega_2$ . Pentru caracterizarea acestei proprietăți, se definește mărimea fizică numită *lărgimea liniei de rezonanță*. Lărgimea liniei de rezonanță este definită prin relația:

$$\Delta\omega_{rez} = \omega_2 - \omega_1 \quad (3.91)$$

unde  $\omega_1$  și  $\omega_2$  sunt cele două valori ale lui  $\omega_p$  pentru care este atinsă puterea efectivă:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \mp \beta$$

Astfel, *lărgimea liniei de rezonanță* este de forma:

$$\Delta\omega_{\text{rez}} = 2\beta = \frac{1}{\tau} \quad (3.92)$$

6. *Energia medie* a sistemului oscilant întreținut reprezintă suma dintre energia cinetică și energia potențială, mediate pe o perioadă:

$$\langle E \rangle = \langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle = \frac{m}{2} \langle v^2 \rangle + \frac{k}{2} \langle x^2 \rangle = \frac{m}{4} (\omega_0^2 + \omega_p^2) A_p^2 \quad (3.93)$$

7. *Factorul de calitate* al sistemului oscilant întreținut este dat de relația:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{\text{rez}}} = \frac{\omega_0}{2\beta} \quad (3.94)$$

### 3.7. Unde elastice

Mediile continue, cum sunt solidele, lichidele și gazele, sunt medii formate din particule (atomi, molecule sau ioni) care interacționează între ele. De aceea, dacă una dintre particule oscilează (vibrează), atunci vor oscila (vor vibra) și particulele vecine; în felul acesta oscilațiile (perturbațiile) se propagă prin mediu de la o particulă la alta. Prin propagarea oscilațiilor se generează undele.

*Unda* reprezintă fenomenul de extindere și propagare din aproape în aproape a unei perturbații periodice produse într-un anumit punct din mediul de propagare. Propagarea undei se face cu o viteză finită, numită *viteza undei*. Unda nu reprezintă transport de materie, ci numai transport de energie.

După *tipul de energie* pe care-l transportă unda, putem deosebi: (i) unde elastice (se transportă energie mecanică, undele fiind generate de perturbațiile mecanice ale mediilor elastice), (ii) unde electromagnetice (se transportă energie electromagnetică) (ii) unde magneto-hidrodinamice (sunt generate prin perturbații electromagnetice și elastice ale mediului de propagare).

După *natura perturbației* și modul de propagare al acesteia, putem clasifica undele în: (1) unde *longitudinale* (direcția de propagare a undei coincide cu direcția de oscilație); (2) unde *transversale* (direcția de propagare a undei este perpendiculară pe direcția de oscilație).

O mărime deosebit de importantă pentru descrierea undei este *funcția de undă*, pe care o putem nota în mod generic cu  $\Psi(x,y,z,t)$ . Funcția de undă reprezintă funcția matematică ce descrie mărimea perturbată.

*Suprafața de undă* reprezintă mulțimea punctelor din spațiu ce oscilează având la un moment dat aceeași valoare a funcției de undă,  $\Psi(x,y,z,t) = \text{constant} = a$ . După forma suprafețelor de undă, putem întâlni unde plane, unde sferice, unde cilindrice, etc.

*Frontul de undă* reprezintă suprafața de undă cea mai avansată la un moment dat.

#### 3.7.1. Unde armonice unidimensionale

Considerăm o oscilație liniară armonică ce se produce în originea O a axei Ox, având amplitudinea constantă, A, și pulsația  $\omega$  (vezi fig. 3.21). Ecuația elongației oscilației în origine este:

$$y_0(t) = A \sin \omega t \quad (3.95)$$

Unda este unidimensională, deoarece oscilația produsă în O se propagă numai pe o direcție. Într-un punct M, situat la distanța x de origine, se va produce o oscilație de același tip, dar într-un moment ulterior și

anume la  $t - \frac{x}{u}$ . Am introdus astfel timpul necesar undei să se propage din O până în M, cu viteza  $u$ , acest timp fiind egal cu  $\tau = \frac{x}{u}$ . De aceea, punctul M are, în orice moment de timp, elongația:

$$y_M(x, t) = A \sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \quad (3.96)$$

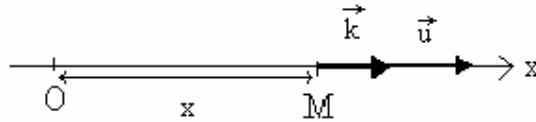


Fig. 3.21. Oscilația generată în originea axei Ox se propagă până în punctul M.

Definim *lungimea de undă a undei unidimensionale*, ca fiind spațiul străbătut de undă în timpul unei perioade,  $T$ , a oscilației:

$$\lambda = u T = u \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.97)$$

Astfel, ecuația undei din punctul M se poate rescrie sub forma:

$$y_M(x, t) = A \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{u} \right) \quad (3.98.a)$$

$$y_M(x, t) = A \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \quad (3.98.b)$$

Constăm că ecuația elongației  $y_M(x, t)$  a oscilației dintr-un punct oarecare M, aflat pe direcția de propagare a undei, are o întârziere de fază, dependentă de poziția sa față de sursa undei. Cu cât punctul M se află mai departe de originea undei, cu atât mai târziu va intra în oscilație; oscilația din punctul considerat va avea o întârziere de fază mai mare, dacă punctul este mai departe de sursa undei.

*Vectorul de undă* este mărimea fizică vectorială orientată în sensul propagării undei și egală în modul cu  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  (vezi fig. 3.21). Direcția vectorului de undă coincide cu direcția vitezei undei,  $\vec{k} \parallel \vec{u}$ . Vectorul de undă materializează direcția în care se propagă energia undei. Utilizând vectorul de undă, putem scrie ecuația elongației oscilației din punctul M sub forma:

$$y_M(x, t) = A \sin(\omega t - kx) \quad (3.99)$$

Faza undei este dependentă de poziție și de timp, fiind egală cu:

$$\varphi(x, t) = \omega t - kx \quad (3.100)$$

În cazul propagării undei într-o direcție oarecare, ecuația (3.99) devine:

$$y_M(x, t) = A \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (3.101)$$

unde intervine produsul scalar dintre vectorul de undă,  $\vec{k}$ , și vectorul de poziție,  $\vec{r}$ .

Se poate observa că între vectorul de undă, viteza de propagare a undei și pulsația oscilației există relația:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{uT} = \frac{\omega}{u} \quad (3.102)$$

Este esențial să observăm că în cazul propagării undelor se utilizează două viteze: (1) viteza de propagare,  $u$ , și (2) viteza de oscilație a particulelor mediului,  $v$ .

(1) Viteza de oscilație a unei particule a mediului de propagare,  $v$ , este variabilă în timp și depinde de poziția particulei, deoarece reprezintă derivata la timp a elongației,  $y_M(x,t)$ :

$$v(x, t) = \frac{dy}{dt} = A \omega \cos(\omega t - kx) \quad (3.103)$$

(2) Viteza de propagare a undei,  $u$ , este o mărime constantă, care depinde de caracteristicile mediului de propagare.

Exemplificăm, mai jos, câteva formule de calcul ale vitezelor de propagare ale undelor în diferite medii continue.

2.a). Unde transversale în coarde elastice:

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (3.104)$$

unde  $T$  este tensiunea din coardă, iar  $\mu$  este masa unității de lungime.

2.b). Unde longitudinale în fluide sau gaze:

$$u = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}} \quad (3.105)$$

unde  $\beta$  este modulul de compresibilitate al mediului, iar  $\rho$  este densitatea lui.

2.c). Unde longitudinale în solide:

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.106)$$

unde  $E$  este modulul de elasticitate al mediului, iar  $\rho$  este densitatea lui.

### 3.7.2. Considerații energetice asupra propagării unde

Propagarea unei unde elastice într-un anumit mediu generează o serie de mișcări de oscilație ale particulelor mediului; punctele materiale își încep mișcarea oscilatorie, în jurul pozițiilor lor de echilibru, pe măsură ce energia unde ajunge până la ele. Vom calcula energia mecanică  $\Delta E$  primită de la unda elastică de către un volum  $\Delta V$  din mediul de propagare. Energia mecanică, adică energia mecanică a particulelor din volumul  $\Delta V$ , se compune din energia cinetică și energia potențială:

$$\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p \quad (3.107)$$

Energia cinetică a particulelor din volumul considerat este:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad (3.108)$$

unde viteza este viteza de oscilație a particulelor mediului de propagare, dată de relația (3.103). Masa volumului  $\Delta V$  este:

$$m = \rho \Delta V$$

Astfel, energia cinetică a particulelor din volumul considerat se scrie sub forma:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \rho \Delta V A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx) \quad (3.109)$$

Energia potențială este energia elastică:

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} k_e x^2 \quad (3.110)$$

unde  $k_e$  reprezintă *constantă elastică echivalentă*. Pentru a o determina, exprimăm forța elastică, care este de forma:

$$F_e = - k_e x \quad (3.111)$$

Conform legii lui Hooke, forța elastică se poate scrie și în funcție de *elongația (alungirea) relativă*  $\varepsilon = \frac{x}{l_0}$ , unde  $l_0$  reprezintă *lungimea în stare nedeformată*:

$$F_e = E S \frac{x}{l_0} \quad (3.112)$$

Comparând relațiile (3.111) și (3.112) putem vedea că valoarea constantei elastice echivalente este:

$$k_e = \frac{E S}{l_0} \quad (3.113)$$

Folosind această expresie în (3.110) obținem:

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} \frac{E S}{l_0} x^2 = \frac{1}{2} E \Delta V \frac{x^2}{l_0^2} = \frac{1}{2} E \Delta V \varepsilon^2 \quad (3.114)$$

unde am folosit și relația  $\Delta V = l_0 S$ .

Utilizăm următoarea relație pentru calculul alungirii relative  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{x}{l_0} = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (3.115)$$

Deoarece mediul de propagare este solid, viteza undei este dată de relația (3.106):

$$u^2 = \frac{E}{\rho} \quad (3.116)$$

Calculăm derivata parțială la  $x$  a elongației  $y$ , dată de relația (3.99), și obținem:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -kA \cos(\omega t - kx) \quad (3.117)$$

Înlocuim relațiile (3.116) și (3.117) în (3.114) și calculăm energia potențială a particulelor din volumul  $\Delta V$ :

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} \rho u^2 \Delta V k^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx) \quad (3.118)$$

Folosim apoi relația  $\omega = k u$ , de unde rezultă:

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \Delta V \cos^2(\omega t - kx) \quad (3.119)$$

Comparând relațiile (3.109) și (3.119), constatăm faptul că cele două componente ale energiei mecanice: (i) sunt egale; (ii) sunt funcții periodice de timp; (iii) oscilațiile lor sunt în fază. Aceasta înseamnă că energia potențială și energia cinetică devin simultan maxime sau nule. Adunăm expresiile (3.109) și (3.119), pentru a determina energia mecanică din volumul  $\Delta V$ :

$$\Delta E = \rho \omega^2 A^2 \Delta V \cos^2(\omega t - kx) \quad (3.120)$$

Analizând relația (3.120), se constată că energia unui volum  $\Delta V$  din mediul de propagare al undei elastice nu este constantă în timp, căci ea este primită de la o sursă, traversează mediul și se propagă mai departe. Energia undei nu se stochează în elementul de volum considerat.

Definim *densitatea volumică* de energie mecanică prin relația:

$$w = \frac{dE}{dV} \quad (3.121)$$

Se constată că densitatea de energie dintr-un punct al mediului de propagare este dată de relația:

$$w = \rho \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx) \quad (3.122)$$

Media pe o perioadă a densității de energie într-un punct al mediului de propagare a undei este dată de integrala:

$$w_m = \frac{1}{T} \int_0^T w dt$$

*Densitatea volumică medie de energie* dintr-un punct este egală cu:



$$w_m = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \quad (3.123)$$

Mărimile definite prin (3.122) și (3.123) caracterizează energia transmisă de undă atunci când traversează mediul de propagare. În fig.3.22 este reprezentată funcția  $w = f(t)$  și se poate vedea și media ei pe o perioadă,  $w_m$ .

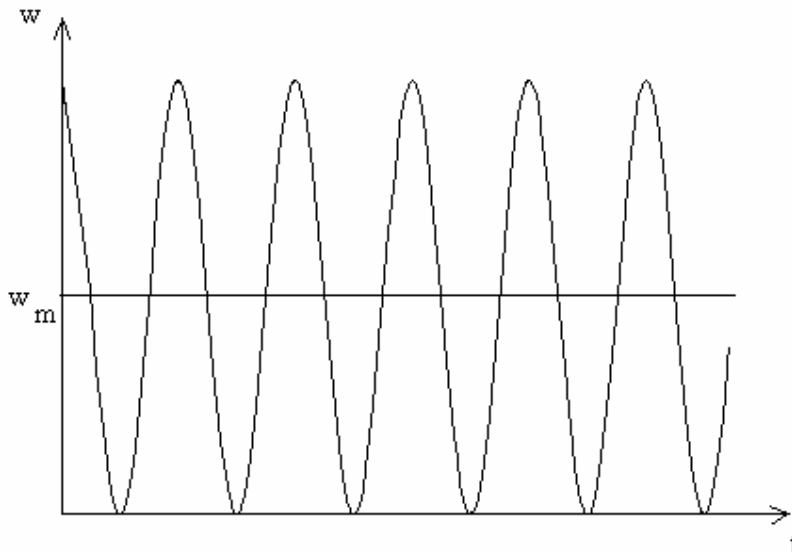


Fig. 3.22. Densitatea volumică de energie într-un punct al mediului de propagare și densitatea volumică medie de energie.

Alte mărimi ce sunt utilizate pentru a descrie energia transportată de undă sunt următoarele:

a). *Fluxul de energie*. Fluxul de energie reprezintă cantitatea de energie transmisă printr-o suprafață în unitatea de timp, fiind dat de derivata energiei la timp:

$$\Phi = \frac{dE}{dt} \quad (3.124)$$

Unitatea de măsură a fluxului de energie este  $[\Phi]_{SI} = 1 \text{ W} = 1\text{J}/1\text{s}$ . Se poate calcula și *fluxul mediu de energie* prin integrarea fluxului de energie pe o perioadă.

b). *Densitatea fluxului de energie* reprezintă fluxul de energie transportat prin unitatea de suprafață, în direcție perpendiculară pe această suprafață:

$$\vec{j} = \frac{d\Phi}{d\vec{S}} = \frac{d}{d\vec{S}} \left( \frac{dE}{dt} \right) = w \vec{u} \quad (3.125)$$

Densitatea fluxului de energie se măsoară în  $[j]_{SI} = 1 \frac{W}{m^2}$ .

c). *Intensitatea undei* reprezintă valoarea medie a densității fluxului de energie:

$$I = \langle \vec{j} \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 u \quad (3.126)$$

Intensitatea undei se măsoară, ca și densitatea fluxului de energie, în  $1 \frac{W}{m^2}$ . Observăm în relația (3.126) faptul că intensitatea undei este direct proporțională cu pătratul amplitudinii.

În cazul în care unda se propagă printr-un mediu absorbant, o parte din energia ei se transformă în căldură, iar intensitatea undei scade, pe măsură ce unda traversează mediul. *Legea lui Beer* exprimă, din punct de vedere matematic, scăderea intensității undei, în funcție de distanța parcursă prin mediu:

$$I = I_0 e^{-\alpha x} \quad (3.127)$$

unde  $\alpha$  este coeficientul de absorbție al mediului, iar  $x$  este spațiul parcurs de vectorul de undă prin mediul considerat. Datorită faptului că intensitatea este proporțională cu pătratul amplitudinii, rezultă că amplitudinea undei scade în mediul disipativ după legea:

$$A = A_0 e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \quad (3.128)$$

Astfel, ecuația undei în mediul disipativ este de forma:

$$y(x, t) = A_0 e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \sin(\omega t - kx) \quad (3.129)$$

### 3.7.3. Reflexia și refracția undelor elastice

Când o undă întâlnește suprafața de separare dintre două medii diferite se produc simultan *reflexia* (întoarcerea undei în mediul din care a venit) și *refracția* (transmisia undei în mediul al doilea). Se constată de asemenea că prin reflexie și refracție se schimbă direcția de propagare a undei.

Considerăm o undă elastică longitudinală plană ce se propagă prin mediul (1), care are densitatea  $\rho_1$  și unde viteza undei este  $u_1$  (vezi fig.3.23). La întâlnirea suprafeței de separare, ( $\Sigma$ ), dintre mediul (1) și mediul (2) unda se va împărți într-o undă reflectată ce se propagă în mediul (1) și o undă transmisă ce se propagă în mediul (2).

Definim *impedanța* mediului de propagare prin produsul dintre densitatea mediului și viteza undei. Impedanța exprimă viteza cu care se propagă energia undei prin mediul respectiv. Cele două medii de propagare au impedanțele:

$$Z_1 = \rho_1 u_1 \quad (3.130.a)$$

$$Z_2 = \rho_2 u_2 \quad (3.130.b)$$

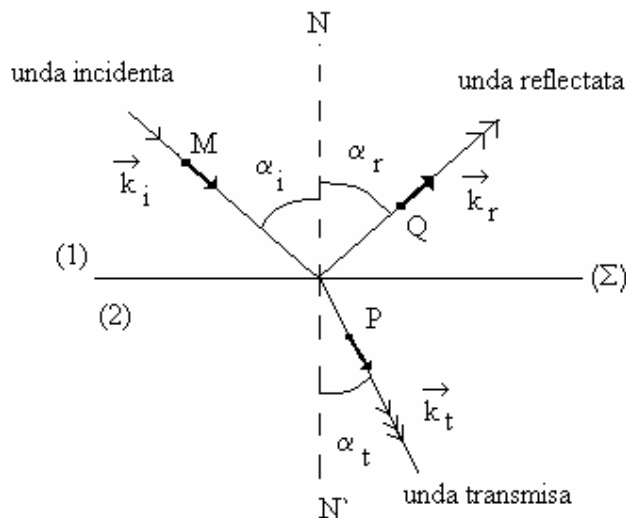


Fig. 3.23. Reflexia și refracția unei unde plane.

Vitezele de propagare în cele două medii sunt:

$$u_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}$$

și, respectiv

$$u_2 = \sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}$$

În fig. 3.23 vectorii  $\vec{k}_i, \vec{k}_r$  și  $\vec{k}_t$  reprezintă vectorii de undă corespunzători undelor incidentă, reflectată și transmisă.  $\vec{r}_i, \vec{r}_r$  și  $\vec{r}_t$  sunt vectorii de poziție ai punctelor M, Q și P, unde exprimăm mărimile de undă. Funcțiile de undă ale undelor incidentă, reflectată și transmisă sunt:

$$y_i = A_i \sin(\omega t - \vec{k}_i \vec{r}_i) \quad (3.131.a)$$

$$y_r = A_r \sin(\omega t - \vec{k}_r \vec{r}_r) \quad (3.131.b)$$

$$y_t = A_t \sin(\omega t - \vec{k}_t \vec{r}_t) \quad (3.131.c)$$

Condiția de continuitate a funcțiilor de undă pe suprafața de separare se scrie sub forma:

$$y_i + y_r = y_t \quad (3.132)$$

Condiția de conservare a energiei unei se scrie sub forma:

$$I_i = I_r + I_t \quad (3.133)$$

unde  $I_i$ ,  $I_r$  și  $I_t$  sunt intensitățile undelor incidentă, reflectată și transmisă, date de relația (3.126), adică:

$$I_i = \frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 A_i^2 u_1$$

$$I_r = \frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 A_r^2 u_1$$

$$I_t = \frac{1}{2} \rho_2 \omega^2 A_t^2 u_2$$

Se poate arăta că punând condiția de continuitate a funcțiilor de undă și de conservare a energiei se obțin legile reflexiei și refracției.

Aceste legi sunt următoarele:

1). *Legea reflexiei*. Unghiul de incidență și unghiul de reflexie sunt egale.

$$\alpha_i = \alpha_r \quad (3.134)$$

2). *Legea refracției sau legea Snellius a refracției*. Raportul dintre sinusul unghiului de incidență și viteza de propagare în primul mediu este egal cu raportul dintre sinusul unghiului de refracție și viteza de propagare corespunzătoare celui de-al doilea mediu.

$$\frac{\sin \alpha_i}{u_1} = \frac{\sin \alpha_r}{u_2} \quad (3.135)$$

Utilizând condiția de continuitate a funcțiilor de undă și condiția de conservare a energiei undei, se pot determina și amplitudinile undelor reflectată și transmisă în funcție de amplitudinea undei incidente:

$$A_i + A_r = A_t \quad (3.136.a)$$

$$\frac{1}{2}\rho_1 \omega^2 A_i^2 u_1 = \frac{1}{2}\rho_1 \omega^2 A_r^2 u_1 + \frac{1}{2}\rho_2 \omega^2 A_t^2 u_2 \quad (3.136.b)$$

Rezolvând sistemul format din ecuațiile (3.136.a) și (3.136.b) obținem:

$$A_r = A_i \left( \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right) \quad (3.137)$$

$$A_t = A_i \left( \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \right) \quad (3.138)$$

Observăm că amplitudinea undei transmise,  $A_t$  are același semn cu amplitudinea undei incidente,  $A_i$ , indiferent de impedanțele celor două medii. De aceea unda transmisă este totdeauna în fază cu unda incidentă.

În ceea ce privește amplitudinea undei reflectate se pot întâlni două cazuri:

a). Mediul (1) mai dens decât mediul (2),  $Z_1 > Z_2$ . În acest caz amplitudinea undei reflectate,  $A_r$ , are același semn cu amplitudinea undei incidente,  $A_i$ . Cele două unde sunt în fază, de asemenea.

b). Mediul (1) mai puțin dens decât mediul (2),  $Z_1 < Z_2$ . În acest caz amplitudinea undei reflectate,  $A_r$ , are semn opus față de amplitudinea undei incidente,  $A_i$ . Cele două unde sunt în opoziție de fază. Unda reflectată este defazată cu  $\pi$  radiani în urma undei incidente.

Definim coeficienții de reflexie și de transmisie ai mediilor de propagare.

*Coeficientul de reflexie* este raportul dintre intensitatea undei reflectate și cea a undei incidente:

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \left( \frac{A_r}{A_i} \right)^2 = \left( \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \quad (3.139)$$

Coeficientul de transmisie este dintre intensitatea undei transmise și cea a undei incidente:

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \left( \frac{A_t}{A_i} \right)^2 = \frac{Z_2}{Z_1} \left( \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad (3.140)$$

Se poate observa că suma coeficienților de reflexie și transmisie este unitară.

$$R + T = 1 \quad (141)$$

Acest fapt este consecința directă a conservării energiei undei elastice.

### 3.7.4. Unde staționare

Dacă în mediul de propagare al undei se suprapun unda incidentă și unda reflectată, atunci se obțin *unde staționare*. Mai general, fenomenul de compunere a două unde coerente se numește *interferență*. Compunerea undei incidente și a undei reflectate constituie un caz interesant de interferență a undelor. Conform rezultatelor obținute la reflexia undelor, se pot întâlni două cazuri, în funcție de impedanțele celor două medii.

I. Dacă mediul al doilea este mai puțin dens decât primul,  $Z_2 < Z_1$ , atunci unda reflectată este în fază cu unda incidentă. Să considerăm o undă liniară ce se propagă în mediul (1), pe o direcție perpendiculară pe suprafața de separare dintre mediul (1) și mediul (2), ca în fig. 3.24. În punctul P se întâlnesc unda incidentă și unda reflectată. Distanța dintre sursa undei și suprafața de separare dintre medii este  $l$ .

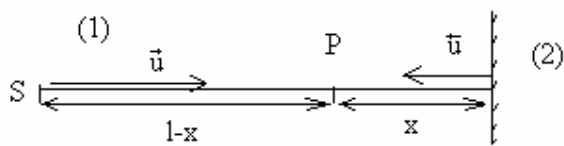


Fig. 3.24. Formarea undei staționare.

Fazele celor două unde ce se întâlnesc în punctul P depind de distanțele  $(l-x)$  și respectiv  $(l+x)$  pe care le-a parcurs fiecare undă.

$$y_i = A \sin[\omega t - k(l-x)] \quad (3.142.a)$$

$$y_r = A \sin[\omega t - k(l+x)] \quad (3.142.b)$$

Rezultatul suprapunerii celor două unde este tot o undă, de ecuație:

$$y = y_i + y_r = A \sin[\omega t - k(l-x)] + A \sin[\omega t - k(l+x)]$$

Regrupăm termenii de sub funcția sinus:

$$y = y_i + y_r = A \sin[\omega t - kl + kx] + A \sin[\omega t - kl - kx]$$

Folosind formula trigonometrică  $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$ , obținem:

$$y = A[\sin(\omega t - kl) \cos kx + \sin kx \cos(\omega t - kl) + \sin(\omega t - kl) \cos kx - \sin kx \cos(\omega t - kl)]$$

Ecuația undei rezultante din punctul P este:

$$y = 2A \cos(kx) \sin(\omega t - kl) \quad (3.143)$$

Această relație constituie ecuația unei staționare care are amplitudinea  $A(x) = 2A \cos kx$ :

$$y = 2 A(x) \sin(\omega t - kl) \quad (3.144)$$

Amplitudinea rezultantă  $A(x)$  va avea valori diferite în diferite puncte, după cum urmează:

a) Amplitudinea este maximă,

$$A = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) = \pm 2A$$

în anumite puncte  $x$ , care îndeplinesc condiția:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) = \pm 1 & \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} x = n\pi \\ \Rightarrow x_v = n \frac{\lambda}{2} & \end{aligned} \quad (3.145)$$

Se obțin maxime de amplitudine în puncte numite *ventre* ale undei, aflate la distanța  $x_v$  unul de altul.

b). În anumite puncte amplitudinea este minimă:

$$\begin{aligned} A = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) = 0 & \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \\ \Rightarrow x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} & \end{aligned} \quad (3.146)$$

Aceste puncte în care nu se produce nici o perturbație, se numesc *noduri* ale undei staționare. Distanța dintre două noduri vecine este  $x_n$ . În fig. 3.25 este reprezentată o undă staționară cu noduri, N, și ventre, V.

În lungimea  $l$  se cuprind un anumit număr de lungimi de undă, și anume:

$$l = \frac{5}{4} \lambda \quad (3.147)$$

II. Dacă mediul al doilea este mai dens decât primul,  $Z_2 > Z_1$ , atunci unda reflectată este în opoziție de fază cu unda incidentă. Atunci, cele două funcții de undă ce se întâlnesc în punctul P sunt de forma:

$$y_i = A \sin[\omega t - k(l - x)] \quad (3.148.a)$$

$$y_r = -A \sin[\omega t - k(l + x)] \quad (3.148.b)$$

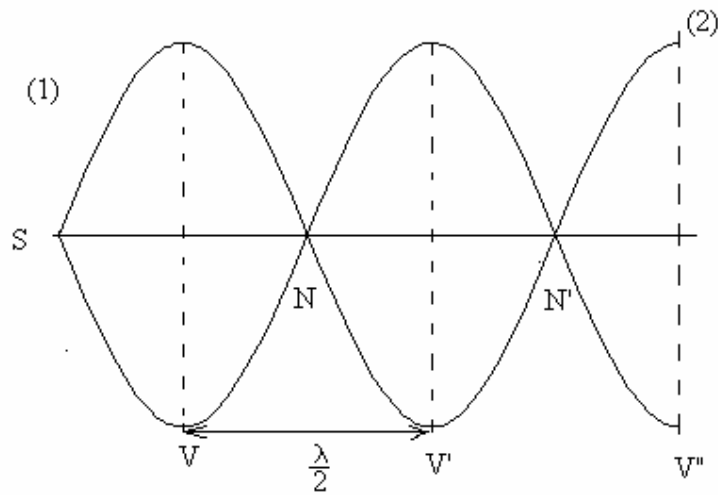


Fig. 3.25. Unda staționară obținută în cazul  $Z_2 < Z_1$ .

Rezultatul adunării celor două unde în punctul P este

$$y = 2A \sin kx [\sin(\omega t - kl)] \quad (3.149)$$

În acest caz ventrele se obțin în punctele situate la distanța:

$$x_v = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} \quad (3.150)$$

iar nodurile se obțin la distanța:

$$x_n = n \frac{\lambda}{2} \quad (3.151)$$

Deși distanța dintre sursa unei elastice și suprafața de separare este aceeași, observăm în fig. 3.26 că distribuția nodurilor și ventrelor este diferită. La suprafața de contact cu mediul mai dens se formează un nod al undei staționare. Acest lucru se datorează schimbării fazei undei reflectate cu  $\pi$  radiani. În esență, rezultă că un alt număr de lungimi de undă se cuprind în lungimea l:

$$l = \frac{3}{2} \lambda \quad (3.152)$$

Asfel, se observă că într-o coardă de lungime dată, l, se pot forma unde staționare numai dacă oscilațiile sursei au asemenea frecvențe încât lungimile de undă corespunzătoare sunt date de: (i) relația (3.147) în cazul în care coarda este liberă; (ii) respectiv de relația (3.152) în cazul în care coarda este legată la capete.



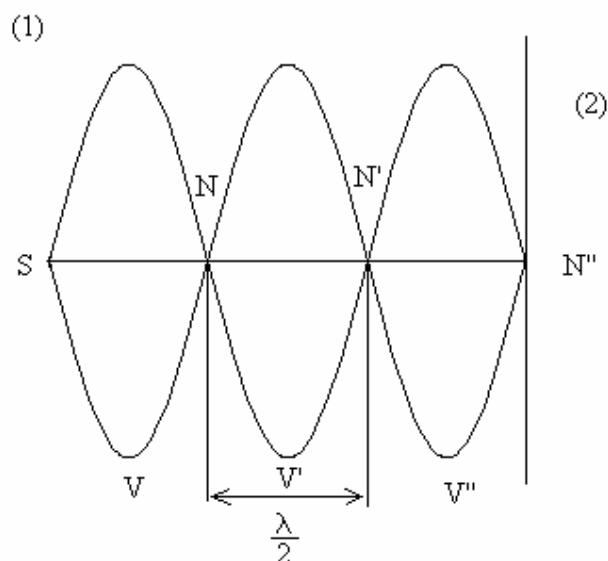


Fig. 3.26. Unda staționară obținută în cazul  $Z_2 > Z_1$ .

### 3.7.5. Interferența undelor

Fenomenul general de compunere a *undelor coerente* se numește *interferență*. Așa după cum știm, intensitatea unei reprezintă cantitatea de energie ce trece prin unitatea de suprafață în unitatea de timp. Să considerăm două unde ce se întâlnesc într-un punct, având funcțiile de undă:

$$y_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (3.151.a)$$

$$y_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (3.151.b)$$

unde  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  sunt funcții de timp.

Amplitudinea unei rezultante se calculează din:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\Delta\varphi) \quad (3.152)$$

unde  $\Delta\varphi$  este *diferența de fază* dintre cele două unde și, în general, depinde de timp:

$$\Delta\varphi = (\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (3.153)$$

Media amplitudinii rezultante pe o perioadă este:

$$\langle A^2 \rangle = \langle A_1^2 \rangle + A_2^2 + 2 \frac{A_1A_2}{T} \int_0^T \cos(\Delta\varphi) dt \quad (3.154)$$

Așa cum știm, intensitatea unei este proporțională cu pătratul amplitudinii. În funcție de valorile integralei din (3.154), intensitatea unei rezultante poate avea diferite forme:

a) Dacă integrala pe o perioadă este nulă,  $\int_0^T \cos(\Delta\varphi)dt = 0$ , atunci intensitatea unei rezultante

este:

$$I = I_1 + I_2 \quad (3.155)$$

În acest caz nu se produce interferență.

b) Dacă  $\Delta\varphi$  este independentă de timp, atunci integrala din (3.154) este diferită de zero,

$\int_0^T \cos(\Delta\varphi)dt \neq 0$ . În acest caz, intensitatea unei rezultante este:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi \quad (3.156)$$

Este cazul în care se produce interferență, deoarece undele ce se întâlnesc sunt unde coerente.

*Condiția de coerență* este ca diferența de fază dintre cele două unde,  $\Delta\varphi$ , să fie independentă de timp. Această condiție este îndeplinită de unde care au pulsații egale și diferența de fază constantă în timp:

$$\omega_1 = \omega_2 \quad \text{și} \quad \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \neq f(t)$$

*Interferența undelor longitudinale.* Cu ajutorul a două difuzoare plasate pe aceeași verticală și conectate la același amplificator se poate obține un dispozitiv de interferență a undelor longitudinale, așa cum se vede în fig.3.26. Distanța dintre cele două difuzoare (surse) este  $2l$ . Presupunând că ambele difuzoare emit simultan, ele se comportă ca două surse de undă,  $S_1$  și  $S_2$ . De la ele se propagă două unde coerente, care parcurg drumuri diferite până în punctul P, aflat la distanța  $y$  de axa de simetrie (vezi fig. 3.27). În punctul P cele două unde se suprapun și, fiind coerente, produc o figură de interferență. În punctele  $S_1$  și  $S_2$  funcțiile de undă corespunzătoare celor două surse sunt identice, și anume au forma:

$$\text{În } S_1: \quad y_1 = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \quad (3.157.a)$$

$$\text{În } S_2: \quad y_1 = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \quad (3.157.b)$$

În punctul P cele două unde au funcțiile de undă de forma:

$$y_1 = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)\right] \quad (3.157.a)$$

$$y_2 = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)\right] \quad (3.157.b)$$

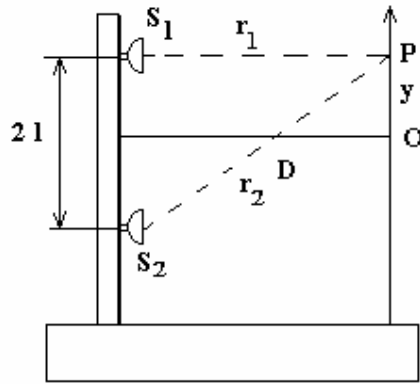


Fig. 3.27. Dispozitiv de interferență a undelor longitudinale.

Unda din punctul P este rezultatul adunării celor două unde:

$$y = y_1 + y_2 = A \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) \right] + A \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right) \right]$$

Folosind formula trigonometrică  $\sin a + \sin b = 2 \sin \left( \frac{a+b}{2} \right) \cos \left( \frac{a-b}{2} \right)$  obținem:

$$y = 2A \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right) \right] \cos \left[ 2\pi \left( \frac{r_2 - r_1}{2\lambda} \right) \right]$$

datorită faptului că distanța D este suficient de mare în raport cu  $r_1$  și  $r_2$ , putem face aproximația  $r_1 + r_2 = 2D$ .

În acest fel, ecuația unei rezultate prin interferență în punctul P devine:

$$y = 2A \cos \left( \pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} \right) \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{D}{\lambda} \right) \right] \quad (3.158)$$

Observăm că amplitudinea rezultantă din punctul P depinde de poziția punctului pe ecran, fiind de forma:

$$A_p = 2A \cos \left( \pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} \right) \quad (3.159)$$

Se pot întâlni două cazuri, în funcție de valorile diferenței de drum  $\Delta r = r_2 - r_1$ :

a) dacă funcția cosinus atinge valoarea maximă, înseamnă că diferența de drum,  $\Delta r$ , este de forma:

$$\begin{aligned} \cos \left( \pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} \right) = 1 &\Rightarrow \pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = n\pi \Rightarrow \\ \Delta r = r_2 - r_1 = n\lambda &\quad (3.160) \end{aligned}$$

În punctele de pe ecran în care este îndeplinită condiția (3.160) se obțin *maxime de interferență*.  $A_p = 2 A$ . Este mai practic deci, ca distanțe de acest fel să fie exprimate ca multipli de semilungimi de undă:

$$\Delta r = r_2 - r_1 = 2n \frac{\lambda}{2} \quad (3.161)$$

Numărul natural  $n$  se numește *ordinul maximului de interferență*. Observăm că în aceste puncte intensitatea unei rezultante este de 4 ori mai mare decât a undelor incidente,  $I_p = A_p^2 = 4 I$ .

b) Dacă funcția cosinus este nulă, rezultă că diferența de drum,  $\Delta r$ , este de forma:

$$\cos\left(\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta r = r_2 - r_1 = (2n + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (3.162)$$

În aceste puncte amplitudinea unei rezultante este nulă, ca și intensitatea ei. Acestea sunt puncte de *minim de interferență*.

Distanța dintre două maxime succesive se numește *interfranță*. Să determinăm distanța  $y_n$  față de centrul ecranului la care se află maximul de ordinul  $n$ . Diferența de drum dintre cele două unde este:

$$\Delta r = r_2 - r_1 = 2n \frac{\lambda}{2} \quad (3.163)$$

Observăm în fig.3.26 că  $y_n$  se poate exprima din triunghiul dreptunghic pe care-l formează axa de simetrie cu direcția drumului  $r_1$ :

$$y_n = D \operatorname{tg} \alpha \quad (3.164)$$

În același timp, din triunghiul dreptunghic pe care-l formează perpendiculara coborâtă din  $S_1$  pe direcția drumului  $r_2$ , obținem:

$$\sin \alpha = \frac{\Delta r}{2l} \quad (3.165)$$

unde  $2l$  este distanța dintre fantele dispozitivului. Unghiul  $\alpha$  este suficient de mic încât să putem folosi aproximația  $\alpha = \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$ . Astfel, înlocuind (3.163) în (3.165), apoi rezultatul lor în (3.164), obținem:

$$y_n = D \alpha = D (2n \frac{\lambda}{2}) \frac{1}{2l} = D n \frac{\lambda}{2} \quad (3.165)$$

Atunci, distanța pe ecran până la maximul de ordinul  $n+1$  este:

$$y_{n+1} = D (n + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (3.166)$$

Distanța dintre două maxime succesive, adică interfranța, este:

$$i = y_{n+1} - y_n = \frac{\lambda D}{2l} \quad (3.167)$$

Astfel, pe verticala Oy se obține un sistem de maxime alternând cu minime de interferență, așa cum se poate vedea în fig. 3.28. Maximele de ordin negativ se află sub axa de simetrie, fiind simetrice față de axă cu maximele de ordin pozitiv.

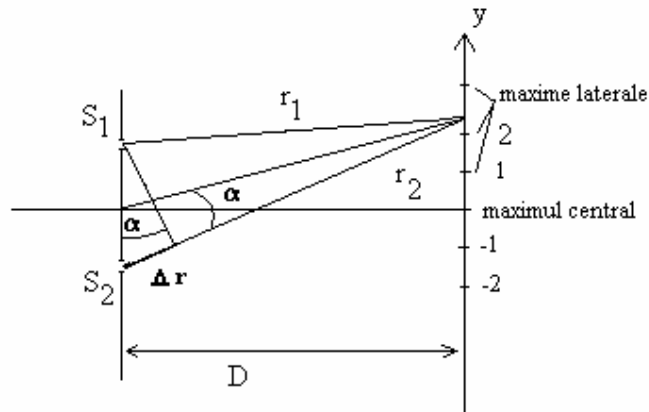


Fig. 3.28. Figura de interferență obținută.

### 3.7.6. Difracția undelor

Considerăm o undă plană care se propagă pe suprafața apei. Un obstacol de forma unui perete vertical cu o fantă de lățime L se află în calea undei, așa cum se vede în fig. 3.29.

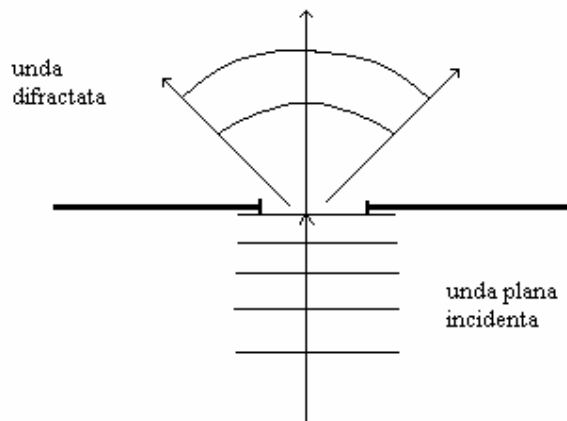


Fig. 3.29. Un obstacol pe care se produce difracția undei plane.

Se constată că unda care trece dincolo de obstacolul întâlnit are frontul de undă de formă sferică, deși unda incidentă avea fronturi de undă plane. Spunem că unda a suferit fenomenul de *difracție* pe fanta de lărgime  $L$ .

*Difracția* este fenomenul de ocolire a obstacolelor de către unde. Efectul difracției este cu atât mai evident cu cât dimensiunea fantei (sau a obstacolului din calea undei) este de ordinul de mărime al lungimii de undă a undei incidente,  $L \approx \lambda$ .

În momentul când frontul plan o atinge, fanta devine sediul unei infinități de surse punctiforme infinitezimale, care generează la rândul lor unde sferice în spatele fantei. Aceste unde se compun între ele și formează o undă sferică ce se propagă în spatele obstacolului. Din punct de vedere fizic nu există deosebiri între difracție și interferență. Ambele fenomene fizice presupun compunerea (adunarea) a două sau mai multor unde coerente (difracția constă din interferența unei infinități de unde infinitezimale).

### 3.7.7. Polarizarea undelor elastice transversale

Considerăm o undă elastică liniară transversală ce poate traversa spațiul dintre doi pereți verticali ce formează o fantă, așa cum se poate vedea în fig. 3.30. Am notat prin  $\vec{A}_i$  vectorul ce reprezintă amplitudinea oscilației din unda incidentă. Putem constata că amplitudinea undei ce trece dincolo de fantă depinde de unghiul pe care-l formează vectorii  $\vec{A}_i$  cu direcția fantei. Procesul prin care fanta filtrează și lasă să treacă numai componenta vectorului amplitudine care este în planul fantei constituie fenomenul de *polarizare*.

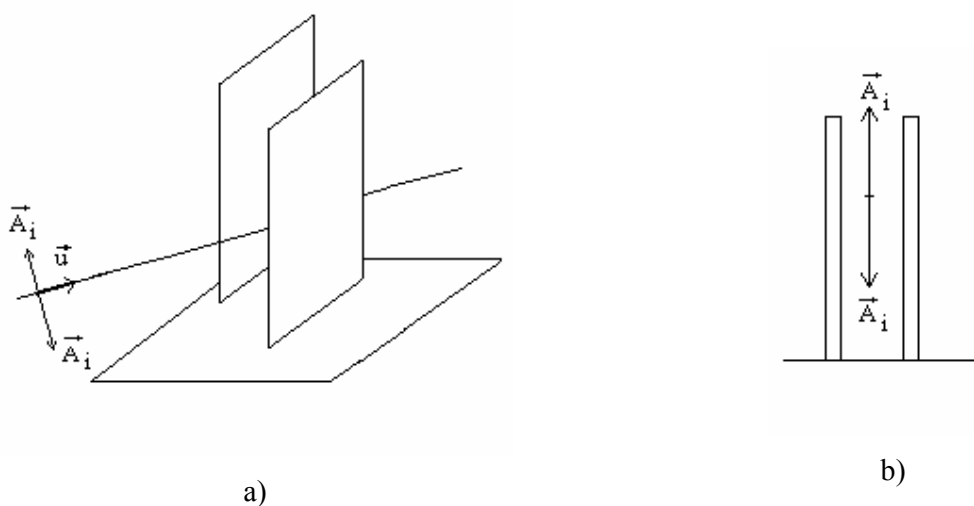


Fig. 3.30. Trecerea unei unde transversale printr-o fantă.

a). vedere generală; b) direcția de vibrație paralelă cu fanta.

a) Dacă amplitudinea undei este paralelă cu fanta, unda se transmite prin fantă, iar unda transmisă are aceeași amplitudine ca cea incidentă (vezi fig. 3.30.b).

b) Dacă direcția de vibrație din unda incidentă este perpendiculară pe direcția fantei, dincolo de fantă nu se mai propagă nici un fel de vibrație (vezi fig. 3.31.a).

c) Dacă direcția de vibrație face un anumit unghi cu fanta, atunci vectorul caracteristic al undei se decompune după două direcții perpendiculare, una din ele fiind direcția fantei (vezi fig. 3.31.b). Dintre cele două componente ale vectorului  $\vec{A}_i$  numai componenta paralelă cu fanta,  $\vec{A}_{\parallel}$ , se transmite mai departe, cealaltă fiind absorbită. Constatăm că unda transmisă dincolo de paravan are o amplitudine mai mică decât amplitudinea undei incidente.

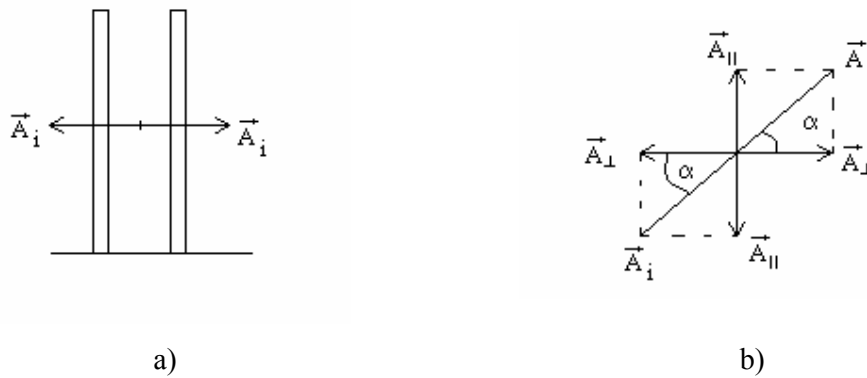


Fig. 3.31. Polarizarea la trecerea unei unde transversale printr-o fantă:

- a) direcția de vibrație este perpendiculară pe fantă;
- b) descompunerea vectorului caracteristic pe două direcții.

*Polarizarea* este fenomenul prin care se poate filtra dintr-o undă numai componenta într-un anumit plan a vectorului de vibrație caracteristic undei. Dispozitivul prin care se realizează polarizarea se numește *polarizor*. Unda al cărei vector de vibrație păstrează aceeași direcție în spațiu se numește *undă liniar polarizată*. În fig. 3.32.a) și b) se pot vedea două exemple de unde liniar polarizate la ieșirea din polarizor.

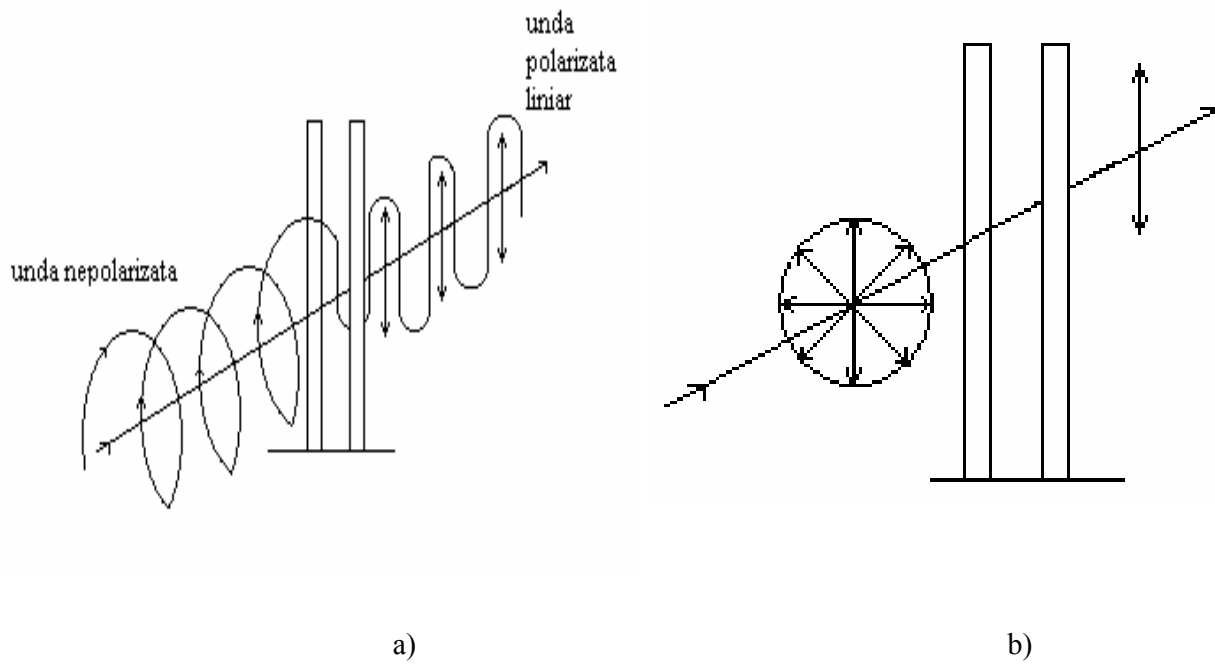


Fig. 3.32. Unde liniar polarizate după trecerea prin polarizor.



## 4. Introducere în electromagnetism

### 4.1. Câmpul electromagnetic

#### 4.1.1. Acțiunea câmpului electromagnetic asupra sarcinilor electrice

Considerăm o sarcină electrică,  $q$ , ce se deplasează cu viteza  $\vec{v}$  într-un spațiu ocupat de un câmp electric, de intensitate  $\vec{E}$  și de un câmp magnetic, de inducție magnetică  $\vec{B}$ , așa cum se poate vedea în fig. 4.1. Asupra sarcinii electrice acționează o forță din partea celor două câmpuri, forță ce se numește *forța Lorentz*. Această forță are expresia generală:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (4.1)$$

În general, câmpul electric și câmpul magnetic sunt funcții complexe de coordonate și de timp, putând fi scrise sub forma:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t) \\ \vec{B} = \vec{B}(x, y, z, t) \end{cases} \quad (4.1.a)$$

unde  $x$ ,  $y$  și  $z$  sunt componentele vectorului de poziție  $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ . Reamintim că viteza este derivata în raport cu timpul a vectorului de poziție al particulei.

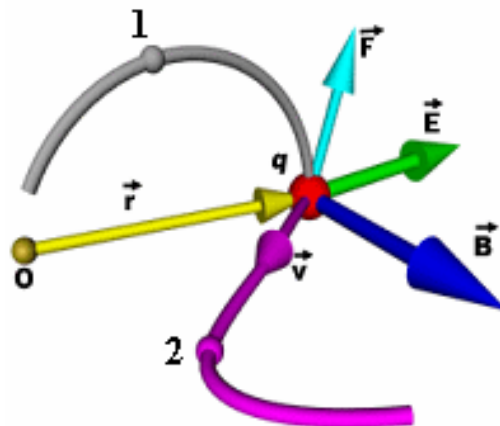


Fig. 4.1. Traectoria unei sarcini electrice în câmp electric și magnetic.

Pentru a determina traiectoria particulei încărcate electric se integrează ecuația:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} \quad (4.2)$$

În cazul în care câmpul magnetic nu se manifestă,  $\vec{B} = 0$ , forța care acționează asupra sarcinii electrice este *forța electrostatică*:

$$\vec{F} = q \vec{E} \quad (4.3)$$

Câmpurile electric și magnetic sunt forme de manifestare ale unui unic câmp fizic, numit *câmpul electromagnetic*. Câmpul electromagnetic este forma de existență a materiei care se manifestă prin acțiunea asupra sarcinilor electrice și asupra curenților electrici. Maxwell a demonstrat pentru prima dată că cele două câmpuri, electric și magnetic, formează un singur câmp, cel electromagnetic.

În anul 1864 Maxwell scrie cele patru ecuații ce-i poartă numele, prin unificarea legilor cunoscute ale electricității și magnetismului, și afirmă că ansamblul celor două câmpuri (electric și magnetic) formează un unic câmp și numai în cazuri particulare se manifestă numai una din componentele sale.

De exemplu, să considerăm mai multe sarcini electrice care sunt fixe. Atunci între ele se manifestă numai câmpul lor electric, numit câmp electrostatic.

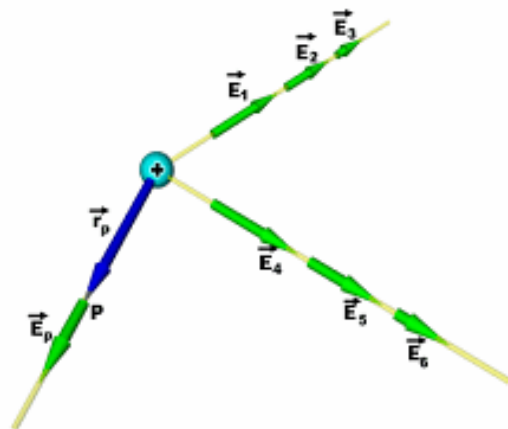
Dacă un magnet în formă de bară este fix, atunci câmpul pe care îl generează este un câmp magnetic numit câmp magnetostatic.

În cazurile generale, vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  iau valori diferite în diferite puncte din spațiu și la diferite momente de timp. În regiunea din spațiu în care ele se manifestă există un câmp electromagnetic, ale cărui componente  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  nu mai pot fi separate.

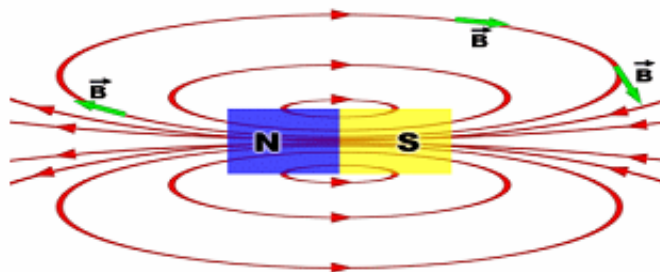
Două exemple semnificative de câmpuri create în jurul unor corpuri sunt redate în fig. 4.2. Observăm în fig. 4.2.a) că în jurul unui corp punctiform încărcat electric se formează un câmp electric în care fiecărui punct din spațiu îi corespunde un vector intensitate a câmpului, care are o valoare ce depinde de vectorul de poziție,  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ .

Câmpul magnetic din jurul unui magnet în formă de bară este reprezentat în fig. 4.2.b), unde se pot vedea vectorii inducție a câmpului magnetic,  $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z)$ .

Câmpurile vectoriale se pot reprezenta atât prin *vectorii de câmp*,  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$ , cât și prin *liniile de câmp*. Liniile de câmp sunt curbe continue care au proprietatea că în orice punct al lor vectorii de câmp corespunzători sunt tangenți la curbă. Liniile de câmp nu se intersectează între ele. Astfel, liniile de câmp din jurul unui corp punctiform încărcat electric sunt radiale, așa cum se poate vedea în fig. 4.2.a). În fig. 4.2.b) se pot vedea liniile de câmp magnetic din jurul unui magnet în formă de bară.



a)



b)

Fig. 4.2. Vectori și linii de câmp:

- a) liniile de câmp electric din jurul unei sarcini electrice;
- b) liniile de câmp magnetic din jurul unui magnet în formă de bară.

#### 4.1.2. Legea conservării sarcinii electrice

În concepția modernă asupra materiei se consideră că substanțele sunt alcătuite din atomi. Atomul este format din electroni și nucleu. Electronii sunt încărcăți electric cu sarcină electrică și ocupă o regiune din spațiu în vecinătatea nucleului. Nucleul este format din neutroni, neutri din punct de vedere electric, și din protoni, care sunt sarcini electrice de semn opus celor ale electronilor. Prin convenție, sarcina electrică a electronului se numește sarcină negativă, iar cea a protonului se numește sarcină

pozitivă. Sarcina electrică a protonului este egală în modul cu sarcina electrică a electronului, având valoarea  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  (unitatea de sarcină electrică este 1 Coulomb = 1 C).

În mod normal un atom este neutru din punct de vedere electric, adică numărul electronilor este egal cu cel al protonilor. Dacă un atom pierde unul sau mai mulți electroni, el devine ion pozitiv. Dacă învelișul electronic al atomului conține mai mulți electroni decât numărul protonilor din nucleu, atomul este un ion negativ. Pentru un corp fizic se generalizează această convenție: Dacă numărul protonilor este egal cu al electronilor din corp, el este neutru din punct de vedere electric. Dacă în corp numărul electronilor este mai mare decât numărul protonilor, el este încărcat electric negativ. Dacă în corp numărul protonilor este mai mare decât numărul electronilor, el este încărcat electric pozitiv.

Într-o aproximație satisfăcătoare pentru scopurile noastre, considerăm sarcinile electrice ale electronilor și protonilor ca fiind indivizibile. Astfel, un corp poate fi încărcat electric cu un număr întreg de sarcini electrice elementare,  $e$ . Sarcinile electrice nu se crează și nu se distrug. Ele se transmit de la un corp la altul sau se redistribuie în cadrul aceluiași corp. Starea de neutralitate electrică a unui corp reprezintă numai faptul că numărul protonilor săi este egal cu numărul electronilor săi.

*Legea conservării sarcinii electrice:* într-un sistem izolat, suma algebrică a sarcinilor electrice rămâne constantă.

Să considerăm, ca exemplu, un sistem format din două sfere identice din sticlă care au fost electrizate astfel încât sarcina electrică de pe fiecare sferă este  $Q_1$  și respectiv,  $Q_2$ , unde  $Q_1 = 7e$ ,  $Q_2 = 5e$ . Sarcina inițială din sistem este  $Q_1 + Q_2 = 7e + 5e = 12e$ .

Dacă se ating cele două sfere, ele vor face un schimb de sarcini electrice, dar suma totală a sarcinii electrice este tot  $12e$ :  $Q_1' = 6e$ ,  $Q_2' = 6e$ .

Să presupunem că cele două sarcini electrice inițiale sunt :  $Q_1 = 7e$ ,  $Q_2 = -5e$ .  
În acest caz suma algebrică a sarcinii electrice din sistem este:  $Q_1 + Q_2 = 7e - 5e = 2e$ .

De ce se întâmplă așa ? Sarcina electrică de  $7e$  reprezintă un deficit de 7 electroni pentru primul corp. Sarcina electrică de  $-5e$  reprezintă un surplus de 5 electroni pentru al doilea corp. Când se ating sferele ele vor efectua un schimb de electroni, în sensul că cei 5e de pe al doilea corp vor trece pe primul corp. Deficitul general de  $2e$  al sistemului se va păstra deci. Cele două sfere, fiind identice, vor avea în final sarcinile:  $Q_1' = 1e$ ,  $Q_2' = 1e$ .

## 4.2. Electrostatica

În 1785 Coulomb deduce legea interacțiunii dintre două sarcini electrice fixe, așa cum se vede în fig. 4.3. El deduce că două sarcini electrice interacționează cu o forță direct proporțională cu produsul sarcinilor electrice și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele:

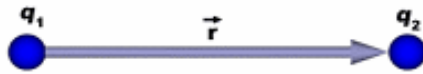


Fig. 4.3. Două sarcini electrice staționare.

$$F_C = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (4.4)$$

Această expresie matematică se numește legea lui Coulomb. Observăm asemănarea acestei forțe cu forța atracției universale:

$$G \approx \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (4.5)$$

Constanta de proporționalitate din legea (4.4) depinde de mediul în care se află cele două sarcini electrice. Dacă ele sunt în vid, intervine mărimea fizică numită *permitivitate dielectrică a vidului*,  $\epsilon_0$ , egală cu  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$ . În Sistemul Internațional, constanta de proporționalitate K este exprimată în

$1 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$ , fiind egală cu :

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \quad (4.6)$$

În cazul în care mediul nu este vidul, în locul lui  $\epsilon_0$  se utilizează permitivitatea dielectrică a mediului respectiv,  $\epsilon$ , egală cu  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ .  $\epsilon_r$  reprezintă permitivitatea dielectrică relativă a mediului.

Folosind aceste relații, legea lui Coulomb a interacțiunii dintre două sarcini electrice aflate într-un mediu oarecare devine :

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (4.7)$$

Se constată experimental că două sarcini electrice de același semn se resping, iar două sarcini electrice de semn opus se atrag. În fig. 4.4 se pot vedea forțele de interacțiune pentru sarcini de același semn și pentru sarcini electrice de semn opus.



a)



b)

Fig. 4.4. Forțele de interacțiune dintre sarcinile electrice :

a) sarcini electrice de același semn; b) sarcini electrice de semn opus.

Forma vectorială a legii lui Coulomb este :

$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r} \quad (4.8)$$

$\frac{\vec{r}}{r}$  fiind un versor al direcției vectorului de poziție,  $\vec{r}$ .

#### 4.2.1. Câmpul electric

Sarcinile electrice interacționează între ele. Forma prin care se transmite la distanță interacțiunea lor se numește *câmp electric*. Dacă un corp este încărcat electric, în spațiul din jurul lui se manifestă un câmp electric pe care el l-a generat. Acest câmp reprezintă capacitatea corpului electrizat de a atrage și de a respinge alte corpuri electrizate. Experimental se arată că sarcinile electrice de același semn se resping, iar cele de semn contrar se atrag.

Considerăm un corp încărcat electric cu sarcina  $Q$ . În jurul lui se manifestă un câmp electric. Dacă în această zonă pătrunde o sarcină  $q$  (corp de probă), ea va fi acționată de forța coulombiană pe care o exercită  $Q$ . Experimental se arată că există o mărime vectorială  $\vec{E}$ , definită prin relația:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_c}{q} \quad (4.9)$$

Această mărime caracterizează tăria câmpului vectorial creat de sarcina electrică  $Q$  în punctul unde se află  $q$ . Mărimea vectorială definită prin relația (4.9) se numește *intensitatea câmpului electric*,  $\vec{E}$ . Deducem că intensitatea câmpului electric creat de sarcina  $Q$  este:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_c}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^3} \vec{r} \quad (4.10)$$

Modulul vectorului intensitate a câmpului electric este egal cu:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \quad (4.11)$$

Intensitatea câmpului electric se măsoară în SI în:  $[E_{SI} = 1 \text{ V/m}]$ .

Prin convenție, sensul liniilor de câmp electric este de la sarcinile pozitive către cele negative, așa cum se vede în fig. 4.5. Tot prin convenție, intensitatea câmpului electric este orientată de la sarcinile pozitive către cele negative.

*Principiul superpoziției:* Dacă  $\vec{E}_1$  este câmpul electric produs de un grup de sarcini electrice, iar  $\vec{E}_2$  este câmpul electric produs de un alt grup de sarcini electrice, atunci efectul produs de acțiunea celor două câmpuri este  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ .

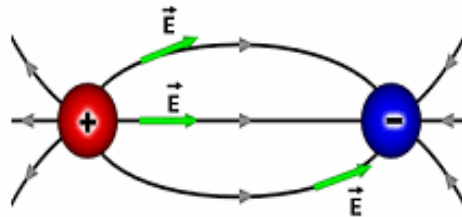


Fig. 4.5. Liniile câmpului electric.

Prin generalizare se obține că rezultanta câmpurilor electrice produse de sarcinile punctiforme  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$  într-un punct din spațiu este egală cu suma vectorială a vectorilor intensitate a câmpului electric,  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3, \dots, \vec{E}_n$ , al fiecărei sarcini electrice în parte:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_n \quad (4.12)$$

O mărime frecvent utilizată în descrierea câmpului electric într-un mediu oarecare este *inducția electrică*,  $\vec{D}$ . Prin inducție electrică se înțelege producerea unui câmp electric staționar în interiorul unui mediu cu ajutorul unui alt câmp electric exterior, de asemenea staționar.

*Câmpul electric al Pământului.* În atmosfera terestră se manifestă un câmp electric creat de ionii rezultați din fenomenul de ionizare a moleculelor de gaz bombardate de radiațiile cosmice. Astfel se formează o pătură sferică conductoare de electricitate la altitudini înalte în jurul Pământului. Chiar Pământul conține o anumită cantitate de sarcini electrice, fiind totodată și un destul de bun conducător de electricitate. Ne putem imagina Pământul și straturile joase ale atmosferei ca formând o sferă conductoare. Între sfera conductoare formată de Pământ și pătura sferică a ionilor de la altitudini înalte există o pătură sferică de circa 50 km grosime, ce nu este un bun conductor electric. La suprafața Pământului se poate măsura un câmp electrostatic având intensitatea de circa  $E = 100\text{V/m}$ . Considerând raza sferei terestre de 5000 km, se poate determina sarcina electrică superficială pe care o are Pământul, și anume această sarcină electrică este de circa  $3 \cdot 10^5\text{ C}$ .

Dacă se introduce un conductor într-un câmp electric staționar se produce, prin influență, o separare de sarcini electrice, iar la atingerea stării de echilibru sarcinile se află numai pe suprafața conductorului, așa cum se poate vedea în fig. 4.6.

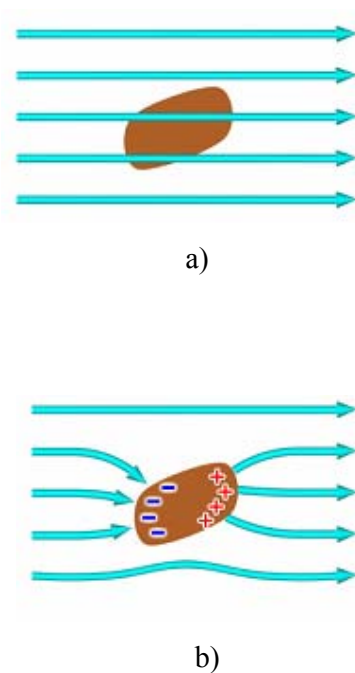


Fig. 4.6. Conductor în câmp electric extern:  
a) la început; b) după stabilirea echilibrului.



Dacă se introduce un dielectric (izolator electric) în într-un câmp electric acesta suferă o *polarizare dielectrică*. *Inducția electrică* reprezintă câmpul electric din interiorul dielectricului și se poate caracteriza prin vectorul inducție electrică:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (4.13)$$

În fig. 4.7 se poate observa polarizarea dielectricului în câmp electric exterior.

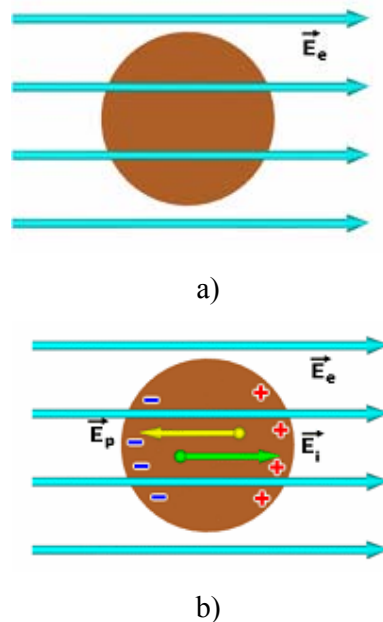


Fig. 4.7. Polarizarea dielectricului în câmp electric exterior:  
a) izolatorul la început; b) după stabilirea echilibrului.

#### 4.2.2. Fluxul electric

Prin convenție liniile de câmp electric se trasează astfel încât numărul de linii de câmp ce traversează unitatea de suprafață normală la liniile de câmp să fie numeric egal cu intensitatea câmpului electric în locul unde este situată suprafața. Un câmp ale cărui linii de câmp sunt paralele și echidistante este un câmp omogen, așa cum se vede în fig.4.8.

Numărul liniilor de câmp ce străbat o suprafață oarecare,  $S$ , normală la liniile de câmp se numește *flux electric*,  $\Phi_e$ .

Pentru un câmp electric omogen, ca acela din fig.4.8, fluxul electric este egal cu produsul scalar al intensității câmpului electric cu vectorul  $\vec{S} = S \vec{n}$ , unde  $\vec{n}$  este versorul normal la suprafață:

$$\Phi_e = \vec{E} \vec{S} \quad (4.14)$$

Referindu-ne la fig. 4.8, putem vedea că unghiul dintre vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{n}$  este zero, iar produsul scalar devine:

$$\Phi_e = \vec{E} \cdot \vec{S} = E S \quad (4.15)$$

Pentru un câmp neomogen, suprafața  $S$  se împarte în arii infinitezimale  $dS$ , astfel încât, în limitele lui  $dS$ , câmpul electric poate fi considerat omogen, adică de valoare constantă și păstrând aceeași direcție (vezi fig. 4.9).

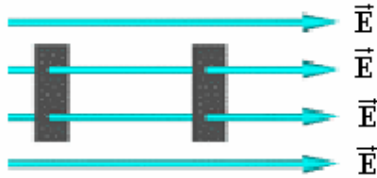


Fig. 4.8. Câmp electric omogen.

Fluxul electric infinitezimal prin suprafața  $dS$  este:

$$d\Phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cos \alpha \, dS \quad (4.16)$$

unde  $d\vec{S} = \vec{n} \, dS$ .

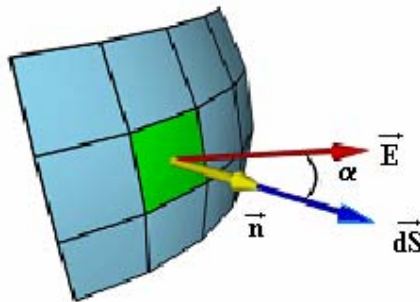


Fig. 4.9. Câmp electric neomogen.

Pentru a determina fluxul electric prin suprafața închisă  $S$ , se integrează relația (4.16) pe suprafața considerată:

$$\Phi_e = \oint_S d\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \cos \alpha \, dS \quad (4.17)$$

Fig. 4.10 prezintă o suprafață închisă și liniile câmpului electric ce produce flux electric prin acea suprafață.

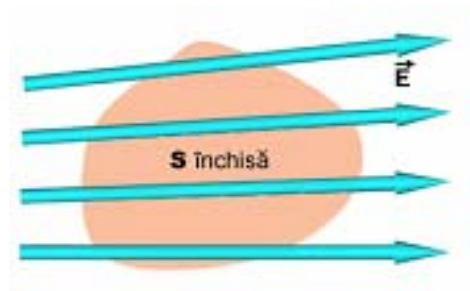


Fig. 4.10. Fluxul electric printr-o suprafață închisă.

#### 4.2.3. Legea lui Gauss pentru câmpul electric

Considerăm o sarcină electrică punctiformă  $Q$  ce se află într-un punct  $P$  în interiorul unei suprafețe închise,  $S$ . Construim o sferă de rază  $r$ , cu centrul în  $P$  (vezi fig. 4.11). Observăm că toate liniile de câmp ce trec prin suprafața  $S$  trec și prin suprafața sferei. De aceea, fluxurile electrice prin cele două suprafețe sunt egale:

$$\Phi_S = \Phi_{S_0} \quad (4.17)$$

Dacă ne referim la cele două suprafețe infinit mici aflate pe sferă și pe suprafața  $S$ , numărul de linii de câmp ce străbat suprafața  $dS_0$  de pe sferă este egal cu numărul de linii de câmp ce străbat suprafața  $dS$  de pe suprafața  $S$ :

$$d\Phi_S = d\Phi_{S_0} \quad (4.18)$$

Exprimăm fluxul infinitesimal prin suprafața  $dS_0$ :

$$d\Phi_{S_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n}_0 dS_0 \quad (4.19)$$

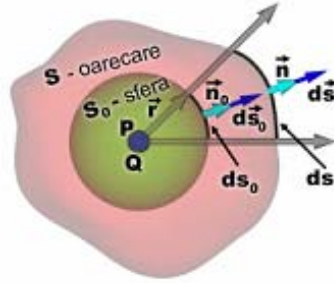


Fig. 4.11. Fluxul electric creat de sarcina electrică din P prin două suprafețe închise.

Observăm că produsul scalar dintre rază și versorul normal la  $dS_0$  este:

$$\vec{r} \cdot \vec{n}_0 = r \cos 0 = r$$

Astfel, fluxul electric infinitesimal prin suprafața  $dS_0$  este:

$$d\Phi_{S_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} dS_0 \quad (4.20)$$

Integrăm fluxul prin suprafața sferei și obținem:

$$\begin{aligned} \Phi_{S_0} &= \oint_{S_0} d\Phi_{S_0} = \oint_{S_0} \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} dS_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} \oint_{S_0} dS_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} S_0 = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Datorită faptului că fluxurile prin cele două suprafețe din fig.4.11 sunt egale, putem scrie:

$$\Phi_S = \Phi_{S_0} = \frac{Q}{\epsilon} \quad (4.22)$$

Expresia (4.22) constituie *legea lui Gauss* pentru câmpul electric: Fluxul ce străbate orice suprafață închisă ce conține sarcina electrică  $Q$  este proporțional cu sarcina electrică și invers proporțional cu permitivitatea dielectrică a mediului.

Această lege constituie o nouă formulare a legii lui Coulomb. Dacă în interiorul suprafeței închise se află mai multe sarcini electrice,  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ , atunci fluxul este egal cu:

$$\Phi_S = \frac{q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n}{\epsilon} \quad (4.23)$$

*Semnul fluxului electric.* Datorită faptului că sarcina electrică poate fi pozitivă sau negativă, fluxului electric i se asociază un semn. Astfel, dacă ne referim la fig. 4.12 putem vedea că unghiul  $\alpha$  poate avea valori:

- a) din cadranul unu,  $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  și în acest caz  $\cos\alpha$  este pozitiv, iar fluxul electric este și el tot pozitiv.
- b) din cadranul doi,  $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ,  $\cos\alpha$  fiind în acest caz negativ, deci fluxul este tot negativ.

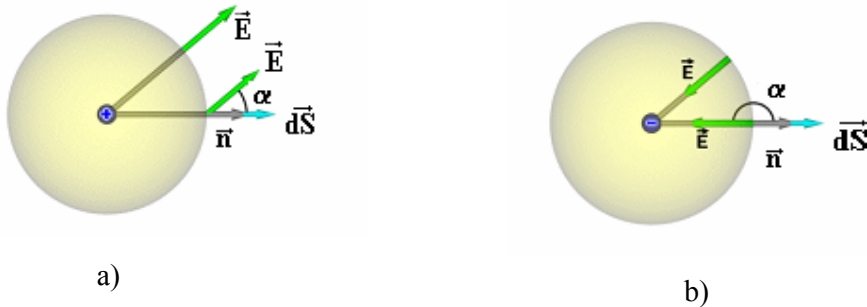


Fig. 4.12. Semnul fluxului electric: a) flux pozitiv; b) flux negativ.

Fluxul electric printr-o suprafață închisă datorat unei sarcinii  $q$  exterioare suprafeței este nul, așa cum vom arăta mai jos. Ne referim la fig. 4.13, unde sarcina electrică din punctul P este exterioară suprafeței închise S.

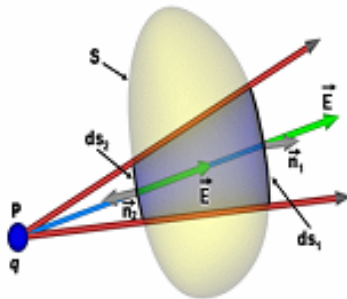


Fig. 4.13. Fluxul electric al unei sarcini electrice exterioare suprafeței.

Observăm că toate liniile de câmp ce trec prin  $ds_1$  trec și prin  $ds_2$ , deci fluxurile prin cele două suprafețe elementare sunt egale, dar de semn opus. Într-adevăr, fluxul infinitesimal prin suprafața  $ds_2$  este negativ, deoarece unghiul dintre vectorii  $\vec{n}$  și  $\vec{E}$  este  $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ . Astfel, cele două fluxuri elementare prin  $ds_1$  și  $ds_2$  se anulează reciproc. Toată suprafața S este formată din perechi de suprafețe aflate față în față, de același fel ca  $ds_1$  și  $ds_2$ . De aceea fluxul electric prin suprafața care nu conține sarcini electrice este nul.

Legea lui Gauss poate fi enunțată și astfel: Fluxul electric printr-o suprafață închisă, de formă arbitrară, este numeric egal cu  $\frac{1}{\epsilon}$  înmulțit cu suma algebrică a sarcinilor electrice aflate în interiorul suprafeței. Fluxul electric este nul, dacă suprafața închisă nu conține sarcini electrice.

#### 4.2.4. Forma locală diferențială a legii lui Gauss

##### Prima ecuație Maxwell

Considerăm o sarcină electrică  $q$  distribuită într-un volum  $V$ . Atunci se definește *densitatea de sarcină electrică*  $\rho$  ca fiind sarcina electrică din unitatea de volum:

$$\rho = \frac{dq}{dV} \quad (4.24)$$

Densitatea de sarcină electrică se exprimă în  $1 \frac{C}{m^3}$ . Astfel, dacă se cunoaște densitatea de sarcină electrică, se poate calcula sarcina electrică dintr-un volum  $V$  prin integrala:

$$q = \int_V \rho \, dV \quad (4.25)$$

Să considerăm volumul  $V$ , închis de suprafața  $S$ , în care se află sarcină electrică cu densitatea volumică  $\rho$ , așa cum se poate vedea în fig. 4.14. Folosind formula matematică Gauss-Ostrogradski, ce transformă integrala pe suprafața închisă  $S$  din legea lui Gauss într-o integrală pe volumul pe care-l închide aceasta, obținem fluxul electric sub forma:

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \, d\vec{S} = \int_V \nabla \vec{E} \, dV \quad (4.26)$$

Unde, prin  $\nabla \vec{E}$ , am notat divergența vectorului  $\vec{E}$ .

Operația de *divergență* a unui vector constă în următoarele: Considerăm un vector având componentele  $E_x$ ,  $E_y$  și  $E_z$  ( $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$ ). Prin operația de divergență se obține scalarul:

$$\nabla \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (4.27)$$

Revenind la legea lui Gauss, substituim relațiile (4.26) și (4.25) în (4.22) și obținem:

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \, d\vec{S} = \int_V \nabla \vec{E} \, dV = \frac{q}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \int_V \rho \, dV \quad (4.28)$$

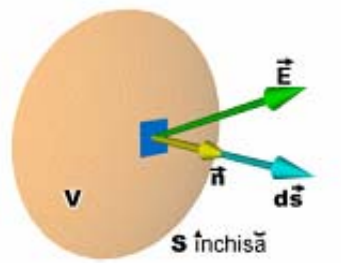


Fig. 4.14. Sarcină electrică distribuită într-un volum  $V$ .

Constatăm că sub integralele volumice se află cantități egale:

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (4.29)$$

Am obținut astfel o *formă locală a legii lui Gauss*, care constituie în același timp *prima ecuație Maxwell*.

*Semnificația fizică a divergenței vectorului  $\vec{E}$ .* Divergența vectorului intensitate a câmpului electric este mai mare în punctele din spațiu unde densitatea volumică de sarcină este mai mare. Cu cât pornesc mai multe linii de câmp dintr-o suprafață închisă, cu atât fluxul electric total este mai mare și divergența câmpului electric este mai mare, așa cum se poate vedea în fig. 4.15. Vectorul  $\vec{E}_2$  are divergența mai mare decât vectorul  $\vec{E}_1$ , deoarece liniile sale de câmp prin aceeași suprafață sunt mai numeroase.

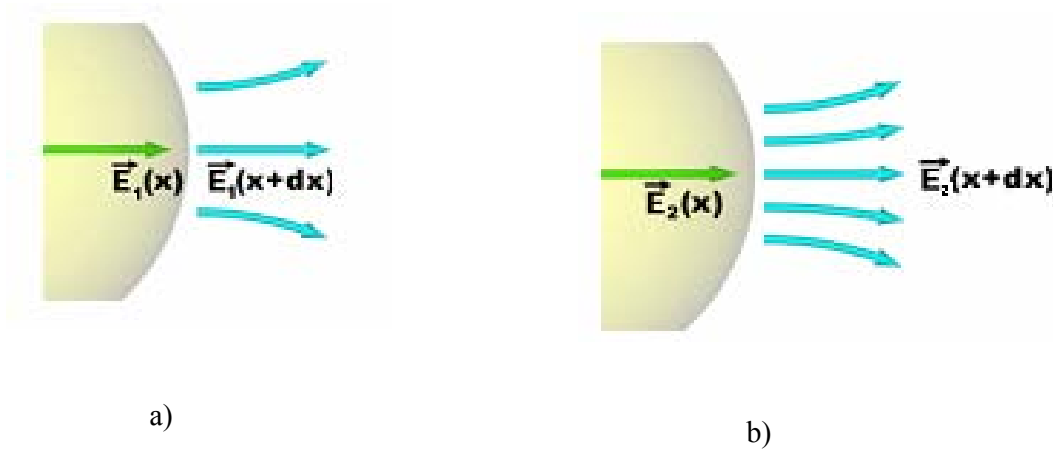


Fig. 4.15. Semnificația fizică a divergenței vectorului  $\vec{E}$ : a) câmp electric cu linii de câmp mai puține; b) câmp electric cu linii de câmp mai dese.  $\nabla \vec{E}_2 > \nabla \vec{E}_1$ .

Dacă într-un punct din spațiu avem divergența nulă,  $\nabla \vec{E} = 0$ , înseamnă că din acel punct nu pornesc linii de câmp electric și el nu reprezintă o sursă de câmp electric.

#### 4.2.5. Caracterul potențial al câmpului electric. Potențialul electric

Considerăm o sarcină electrică  $Q$  fixă. În câmpul electric creat de aceasta se mișcă o sarcină  $q$ , numită corp de probă. Să presupunem că sarcina  $q$  se deplasează pe traiectoria ei din punctul  $A$  în punctul  $B$ , așa cum se poate vedea în fig. 4.16.

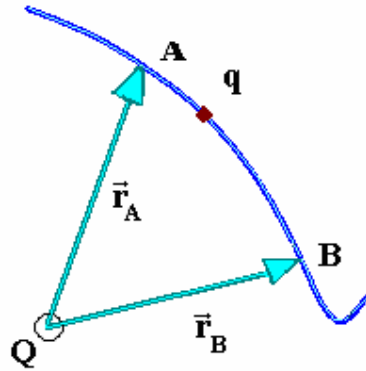


Fig. 4.16. Deplasarea sarcinii electrice  $q$  în câmpul creat de sarcina electrică  $Q$ .

Lucrul mecanic efectuat la deplasarea sarcinii electrice  $q$ , din punctul  $A$  până în punctul  $B$ , în câmpul creat de  $Q$  este egal cu:

$$L_{AB} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (4.30)$$

Dacă punctul  $B$  se află la infinit,  $\vec{r}_B \rightarrow \infty$ , atunci lucrul mecanic pentru deplasarea corpului de probă din  $A$  până la infinit este:

$$L_{A\infty} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r_A} \right) \quad (4.31)$$

Dacă sarcina  $q = 1$  C, atunci lucrul mecanic dat de (4.31) devine:

$$L_{A\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r_A} \quad (4.32)$$

Relația (4.32) introduce mărimea fizică *potențial electric al punctului  $A$* , care reprezintă lucrul mecanic necesar pentru deplasarea corpului de probă cu sarcina electrică  $q = 1$  C din punctul  $A$  până la infinit, sau pentru deplasarea lui  $q$  de la infinit până în punctul considerat:

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r_A} \quad (4.33)$$



Potențialul electric este o mărime scalară și este măsurat în Volți,  $1V = \frac{1J}{1C}$ .

În general, putem exprima potențialul electric într-un punct situat la distanța  $r$  de sarcina punctiformă  $Q$  prin:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \quad (4.34)$$

Observăm că toate punctele situate la distanța  $r$  de  $Q$  au același potențial electric, Astfel, în jurul sarcinii electrice  $Q$  se formează o sferă de rază  $r$  pe care toate punctele au același potențial electric (vezi fig .4.17). Această sferă de potențial electric constant constituie o *suprafață echipotențială*. În jurul sarcinii electrice punctiforme  $Q$  se află sfere concentrice echipotențiale, fiecareia corespunzându-i o anumită valoare a potențialului electric.

Definim *tensiunea electrică* dintre două puncte ca fiind diferența potențialelor electrice ale celor două puncte considerate:

$$U = V_A - V_B \quad (4.35)$$

Tensiunea electrică este o mărime fizică scalară și se exprimă tot în Volți.

*Energia electrostatică* este egală cu produsul dintre diferența de potențial și sarcina electrică de probă  $q$ :

$$W = q(V_A - V_B) = q U \quad (4.36)$$

Se constată că lucrul mecanic efectuat la deplasarea lui  $q$  între punctele  $A$  și  $B$  este independent de forma drumului dintre punctele  $A$  și  $B$  și depinde numai de capetele drumului. De aceea, câmpul electric este un câmp potențial.

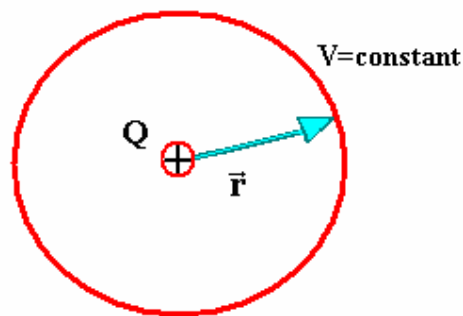


Fig. 4.17. Suprafață sferică echipotențială în jurul sarcinii electrice  $Q$ .

*Energia câmpului electric.* La încărcarea unui condensator plan se consumă un lucru mecanic pentru a transporta sarcinile electrice de pe o armătură pe alta. Lucrul mecanic infinitesimal efectuat pentru a transporta sarcina infinitesimală  $dQ$  de pe o armătură pe alta este:

$$dL = U dQ \quad (4.37)$$

unde  $U$  este diferența de potențial dintre armături.

Dar sarcina electrică  $Q$  de pe armături este egală cu produsul dintre diferența de potențial și capacitatea electrică a condensatorului:

$$Q = C U \quad (4.38.a)$$

deci sarcina infimezimală  $dQ$  este:

$$dQ = C dU \quad (4.38.b)$$

Astfel, lucrul mecanic infimezimal efectuat pentru a transporta sarcina infimezimală  $dQ$  de pe o armătură pe alta este:

$$dL = C U dU \quad (4.39)$$

Lucrul mecanic efectuat pentru încărcarea condensatorului este:

$$L = \int_0^U C U dU = \frac{1}{2} C U^2 \quad (4.40)$$

*Energia câmpului electric sau energia electrică este:*

$$W = \frac{1}{2} C U^2 \quad (4.41)$$

*Definim densitatea volumică de energie electrică ca fiind energia electrică din unitatea de volum:*

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (4.42)$$

Această relație se obține transformând energia electrică dintre armăturile condensatorului astfel:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon \frac{S}{d} U^2 = \frac{1}{2} \epsilon \frac{S}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 V$$

unde am folosit definiția *capacității electrice* a condensatorului plan:

$$C = \epsilon \frac{S}{d} \quad (4.43)$$

și relația dintre tensiunea electrică și intensitatea câmpului electric dintre armături:

$$U = E d. \quad (4.44)$$

### 4.3. Magnetostatica

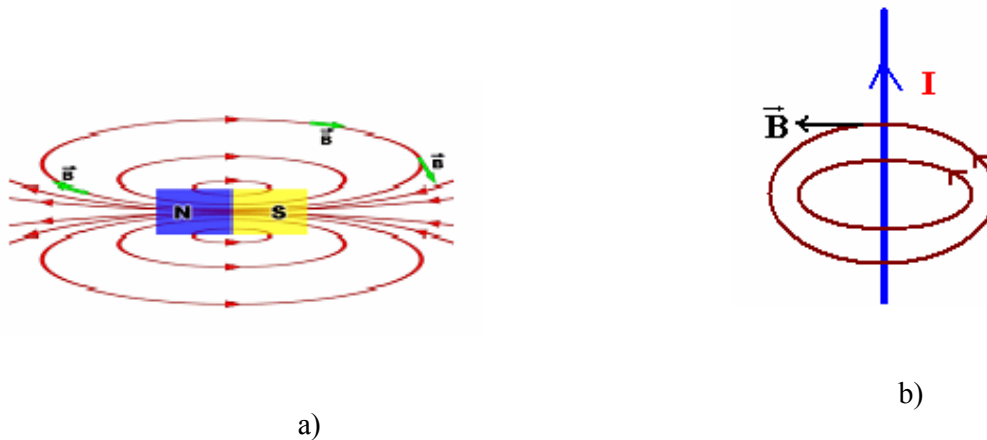
#### 4.3.1. Câmpul magnetic

În spațiul din jurul unui magnet în formă de bară sau în jurul unui conductor parcurs de curent electric există un *câmp magnetic*, care acționează asupra sarcinilor electrice aflate în mișcare sau asupra curenților electrice și asupra magneților. Vectorul care descrie câmpul magnetic, în mod obișnuit, este inducția magnetică,  $\vec{B}$ . O mărime vectorială proporțională cu inducția magnetică  $\vec{B}$  este intensitatea câmpului magnetic  $\vec{H}$ , între cele două mărimi existând relația de proporționalitate:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

unde  $\mu_0$  și  $\mu_r$  sunt permeabilitatea magnetică a vidului și respectiv, permeabilitatea magnetică relativă a mediului. Inducția magnetică se exprimă în Tesla,  $[B]_{SI} = 1T$ .

Liniile de câmp magnetic sunt *linii de câmp închise*, așa cum se poate vedea în fig. 4.18.a), pentru câmpul magnetic din jurul unui magnet în formă de bară, și în fig. 4.18.b) pentru un curent liniar. Observăm că liniile de câmp magnetic sunt orientate de la polul Nord la polul Sud, ca și vectorii inducție magnetică  $\vec{B}$ . Ne amintim că liniile de câmp electric sunt linii deschise. Acest fapt se datorează existenței sarcinilor electrice pozitive și negative. Câmpul magnetic nu are sarcini "monopolare", de aceea liniile de câmp magnetic nu pot fi linii deschise. Asta arată experiența și teoria, la nivelul actual al cunoașterii științifice. "Existența monopolului magnetic", adică a unui corp cu un singur pol magnetic, este confirmată de teorii moderne, dar nu a fost încă demonstrată experimental.



a)  
Fig. 4.18. Liniile de câmp închise în jurul:

a) unui magnet în formă de bară; b) unui curent liniar.

#### 4.3.2. Acțiunea câmpului magnetic asupra sarcinilor electrice în mișcare

Considerăm un câmp magnetic omogen, de inducție magnetică  $\vec{B}$ , în care se deplasează cu viteza  $\vec{v}$  un corp punctiform electricizat cu sarcina  $q$ . Forța cu care acționează câmpul magnetic asupra sarcinii electrice este *forța Lorentz*:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (4.45)$$

unde apare produsul vectorial dintre vectorii viteză și inducție magnetică.

Modulul forței Lorentz se calculează cu relația:

$$F = q v B \sin \alpha \quad (4.46)$$

unde  $\alpha$  este unghiul dintre direcțiile vectorilor  $\vec{B}$  și  $\vec{v}$ .

În funcție de orientarea vectorului viteză în raport cu direcția câmpului magnetic putem întâlni mai multe traiectorii ale particulei electrizate:

a) Vectorul viteză este paralel cu vectorul inducție magnetică (vezi fig. 4.19.a). În acest caz unghiul dintre vectori este zero, iar forța Lorentz este și ea zero, deoarece  $\sin 0 = 0$ . Particula nu este deviată de la traiectoria rectilinie.

b) Viteza particulei este perpendiculară pe inducția magnetică (vezi fig. 4.19.b). În acest caz unghiul dintre cei doi vectori este  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , iar forța Lorentz este maximă:

$$F = q v B \quad (4.46.a)$$

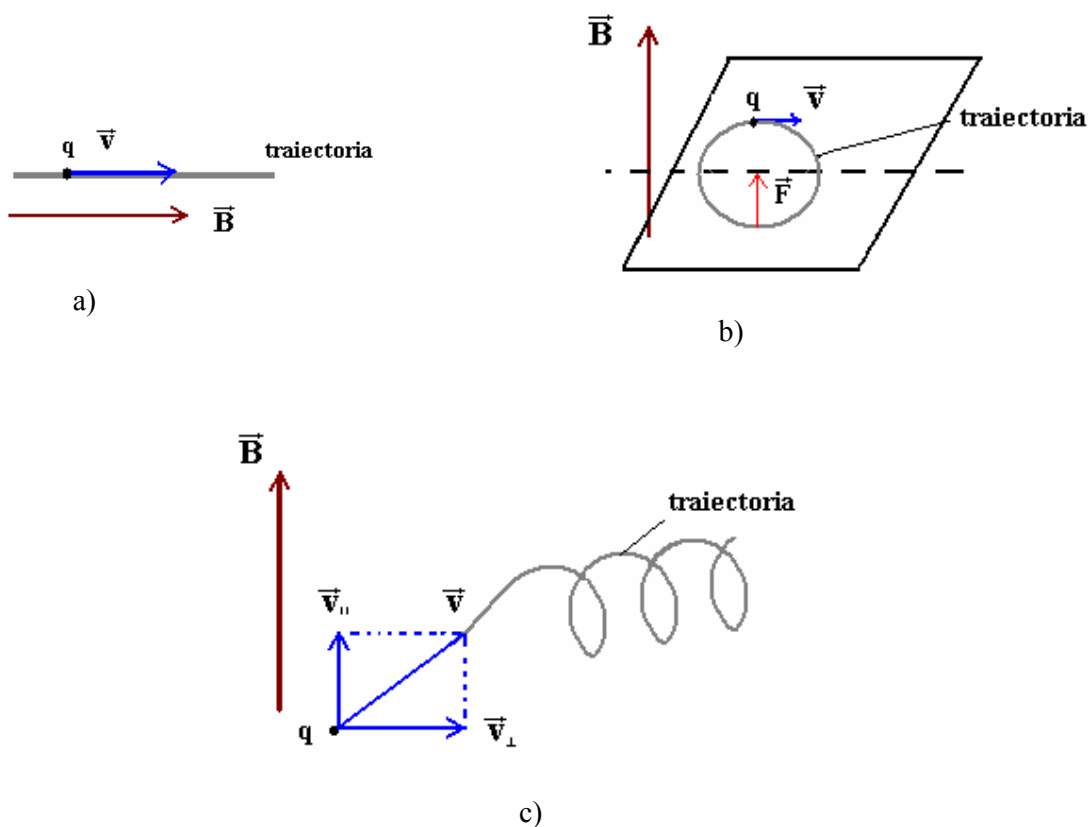


Fig. 4.19. Traiectoriile ale particulei în câmp magnetic:

a) viteza paralelă cu  $\vec{B}$  ; b) viteza perpendiculară pe  $\vec{B}$  ; c) direcție oarecare.

Din definiția produsului vectorial rezultă că vectorul  $\vec{F}$  este perpendicular pe planul format de vectorii viteză și inducție magnetică. Forța Lorentz acționează ca o forță de tip central, determinând ca traiectoria particulei să devină un cerc. Raza traiectoriei se determină din condiția menținerii particulei pe cerc:

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \quad (4.47)$$

unde termenul din dreapta ecuației reprezintă forța centrifugă de inerție.

c) Vectorul viteză face un unghi oarecare cu inducția magnetică (vezi fig. 4.19.c). În acest caz viteza se descompune în două componente, una paralelă cu liniile de câmp magnetic, iar cealaltă

perpendiculară pe ele. Datorită componente vitezei paralele cu  $\vec{B}$  particula se mișcă rectiliniu și uniform. Componenta perpendiculară pe  $\vec{B}$  determină o mișcare circulară. Compunerea celor două mișcări determină o traiectorie sub forma unei spirale.

#### 4.3.3. Acțiunea câmpului magnetic asupra unui conductor parcurs de curent electric

Cunoaștem faptul că asupra unui corp electrizat aflat în mișcare se exercită acțiunea câmpului magnetic sub forma forței Lorentz. Curentul electric constituie o mișcare dirijată de sarcini electrice, de aceea asupra conductorului aflat în câmp magnetic se va exercita o forță ce constituie rezultanta tuturor forțelor Lorentz ce se manifestă asupra fiecărui purtător liber de sarcină electrică din conductor. Un element de conductor de lungime  $dl$ , pentru care se definește vectorul  $d\vec{l}$  (care este ales ca un vector orientat în sensul curentului electric), se află sub acțiunea unei forțe elementare de acțiune din partea câmpului magnetic exterior de forma produsului vectorial:

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (4.48)$$

nimează forța lui Laplace electromagnetice.

În fig. 4.20 se poate vedea o porțiune dintr-un conductor rectiliniu parcurs de curentul electric de intensitate  $I$  și aflat într-un câmp magnetic de inducție  $B$ . Să presupunem că vectorii  $\vec{B}$  și  $d\vec{l}$  formează planul foii. Atunci direcția forței elementare de acțiune asupra conductorului parcurs de curentul electric este, conform definiției produsului vectorial, perpendiculară pe planul foii. Prin integrarea relației (4.48) se obține forța exercitată de câmpul magnetic asupra întregului conductor de lungime  $l$ :

$$\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B}) \quad (4.48.a)$$

unde se consideră că vectorul  $\vec{l}$  are direcția curentului electric.

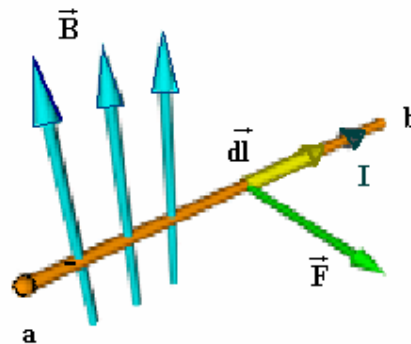


Fig. 4.20. Forța ce se exercită în câmp magnetic asupra curentilor electrici.

Pentru exemplul considerat mai sus, dacă direcția vectorului câmp magnetic,  $\vec{B}$ , este perpendiculară pe conductor, modulul forței exercitate de câmpul magnetic asupra conductorului este:

$$F = B I l$$

Dacă direcția vectorului inducție magnetică formează un unghi  $\alpha$  cu direcția curentului electric, atunci modulul forței Laplace electromagnetice este:

$$F = B I l \sin \alpha$$

#### 4.3.4. Câmpul magnetic creat de curenții electrici

În subparagraful 4.1.1 am considerat efectul câmpului electromagnetic asupra sarcinilor electrice în mișcare, scriind forța lui Lorentz. În paragraful 4.2 am văzut că sarcinile electrice, chiar fixe fiind, crează câmpuri electrice în jurul lor. Este natural să ne punem întrebarea dacă nu cumva se crează și câmpuri magnetice în jurul sarcinilor electrice. Experiența demonstrează că numai sarcinile electrice aflate în mișcare crează câmpuri magnetice. O sarcină electrică aflată în mișcare față de un observator fix, produce în jurul ei un câmp magnetic cu linii de câmp de forma unor cercuri în plane perpendiculare pe vectorul viteză, cu centrele aflate pe o dreaptă ce trece prin acest vector. Cunoaștem faptul că un curent electric este o mișcare dirijată de sarcini electrice. Înseamnă că în jurul conductorilor parcurși de curent electric se crează câmpuri magnetice produse de însumarea tuturor câmpurilor magnetice elementare generate în jurul sarcinilor electrice.

a) În jurul unui conductor liniar parcurs de un curent electric de intensitate  $I$ , se manifestă un câmp magnetic cu linii de câmp închise, așa cum se poate vedea în fig. 4.21. Intensitatea câmpului magnetic creat la distanța  $r$  de conductor este:

$$H = \frac{I}{2 \pi r} \quad (4.49)$$

Expresia (4.49) reprezintă legea *Biot-Savart*.

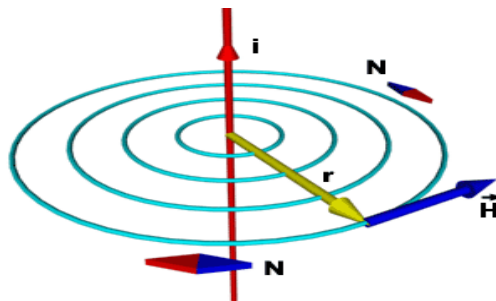


Fig. 4.21. Câmpul magnetic creat de un curent liniar.

Dacă un curent electric străbate un conductor de o formă oarecare, așa cum se vede în fig. 4.22, câmpul magnetic este suma vectorială a tuturor câmpurilor magnetice create de fiecare porțiune elementară a conductorului. Intensitatea infintezimală a câmpului magnetic creat de un element de lungime  $d\vec{l}$ , la distanța  $r$  de el, este:

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} \quad (4.50)$$

unde  $\vec{e}_r$  este versorul ce descrie direcția vectorului de poziție  $\vec{r}$ .

Expresia (4.50) se numește legea *Biot-Savart-Laplace*. Modulul vectorului intensitate a câmpului magnetic este:

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{dl \sin \varphi}{r^2}$$

Dacă dorim să exprimăm inducția magnetică a câmpului creat în spații unde există materie, trebuie să ținem seama de relația dintre intensitatea și inducția câmpului magnetic:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

unde  $\mu$  reprezintă permeabilitatea magnetică a mediului,  $\mu = \mu_0 \mu_r$ .  $\mu_0$  reprezintă permeabilitatea magnetică a vidului,  $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7}$  Wb /Am, iar  $\mu_r$  reprezintă permeabilitatea magnetică relativă a mediului.

Pentru a determina câmpul magnetic al întregului circuit, se integrează relația (4.50) pe lungimea  $l$ . Calculele efectuate în cazurile cu circuite electrice de forme complicate sunt dificile, dar noi vom da numai rezultatele integrării pentru câteva cazuri de circuite simple, aflate în vid.

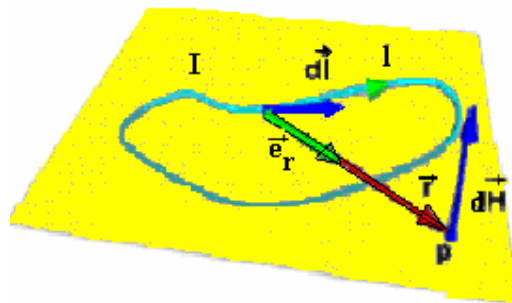


Fig. 4.22. Câmpul magnetic creat de un curent de o formă oarecare.

b) Un curent electric de forma unei spire plane circulare, de rază  $r$ , crează un câmp magnetic în centrul spirei având vectorul inducție magnetică perpendicular pe planul spirei (vezi fig. 4.23):

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{I}{2r} \quad (4.51)$$

c) În cazul în care avem o mulțime  $N$  de spire circulare de lungime  $l$ , cu o densitate de spire pe unitatea de lungime  $n = N/l$  câmpul magnetic creat pe axa de simetrie este:

$$B = \mu_0 \frac{I n}{2r} \quad (4.52)$$

Dacă în spațiul care închide circuitul electric se află substanță, atunci formulele de mai sus vor conține permeabilitatea magnetică a mediului respectiv.

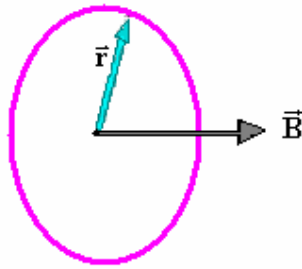


Fig. 4.23. Câmpul magnetic creat de o spirală circulară.

### ***Inducția magnetică a Pământului.***

Substanțele care alcătuiesc Pământul crează în spațiul cosmic din jurul planetei noastre un câmp magnetic echivalent cu câmpul din exteriorul unei sfere uniform magnetizate (vezi fig. 4.24). Pământul are o *axă a polilor magnetici*, care în epoca geologică actuală formează un unghi de aproximativ  $15^\circ$  cu *axa poliilor geografici*. Întocmai ca la un magnet în formă de bară, liniile de câmp magnetic terestru ies din puncte de pe *emisfera magnetică sudică* și intră în puncte de pe *emisfera nordică*. Din acest motiv, polii magnetici constituie acele puncte de pe suprafața Pământului din care liniile de câmp magnetic sunt verticale.



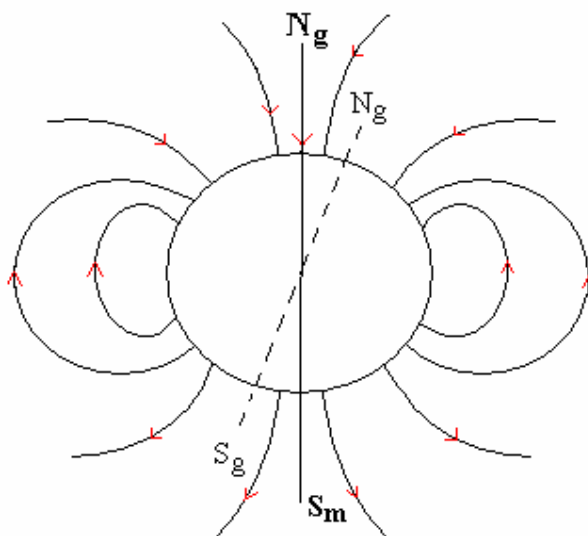


Fig. 4.24. Câmpul magnetic terestru.

#### 4.3.5. Legea lui Gauss pentru magnetism

*Fluxul magnetic printr-o suprafață* este definit ca produsul scalar dintre vectorul inducție magnetică și versorul normal la suprafață, multiplicat prin aria suprafeței considerate. Dacă inducția magnetică nu este constantă pe suprafața considerată, această suprafață se împarte în suprafețe infinitezimale,  $dS$ , astfel încât vectorul inducție magnetică să fie constant pe aria  $dS$ . Atunci fluxul magnetic total este integrala fluxurilor elementare produse prin ariile  $dS$ :

$$\Phi_m = \int_S d\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (4.53)$$

unde vectorul  $d\vec{S}$  este obținut prin înmulțirea ariei  $dS$  cu versorul normal la ea.

Să considerăm o suprafață închisă  $S$  în jurul magnetului în formă de bară din fig. 4.25.

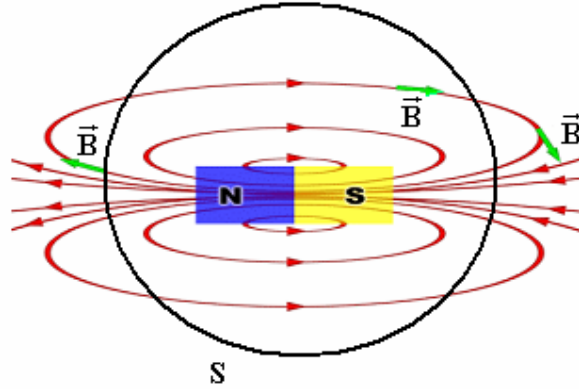


Fig.4.25. Suprafață sferică în jurul magnetului în formă de bară.

Observăm că numărul liniilor de câmp care intră în suprafața S este egal cu numărul liniilor de câmp care ies din S, deci fluxul magnetic prin suprafața închisă S este nul. Această constatare nu este valabilă numai pentru câmpul magnetic considerat, ci este o proprietate generală a câmpului magnetic, indiferent de structura surselor de câmp magnetic sau de forma suprafeței considerate.

Fluxul magnetic este nul printr-o suprafață închisă datorită faptului că liniile de câmp magnetic sunt linii închise. Astfel, oricâte linii de câmp intră într-o suprafață închisă tot atâtea și ies din ea. Aceasta constituie *legea lui Gauss pentru magnetism*:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.54)$$

Utilizând teorema Gauss-Ostrogradski, obținem:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{B} \, dV = 0 \quad (4.55)$$

ceea ce revine la forma locală a legii lui Gauss:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.56)$$

Relația (4.56) constituie, în același timp, cea de-a doua ecuație a lui Maxwell.

Semnificația fizică a relațiilor (4.54) și (4.56) este mult mai profundă decât faptul strict matematic că divergența câmpului magnetic este nulă. Într-adevăr, divergența unui vector de câmp este nulă dacă acel câmp nu are surse punctuale (de tip "sarcină electrică de un semn"). Până în zilele noastre nu s-a putut pune în evidență existența fizică a *monopolului magnetic*, care ar reprezenta, de exemplu, posibilitatea existenței de sine stătătoare și independente a polului Nord față de polul Sud al unui magnet permanent. Deși teoria cuantică prevede încă din 1930 existența monopolului magnetic, acesta nu a putut fi pus în evidență, până în prezent. Nu putem realiza încă nici o combinație de magneți permanenți și de

curenți electrici care să genereze un câmp magnetic radial cu linii de câmp deschise, asemănător câmpului electrostatic creat de o sarcină electrică punctiformă.

#### 4.3.6. Interacțiunea dintre doi curenți paraleli

Se constată experimental că între doi conductori liniari, practic infinit de lungi, paraleli între ei și parcurși de curenți electrici de intensități  $I_1$  și  $I_2$ , se manifestă o forță de interacțiune ce depinde de distanța dintre ei. Forța de interacțiune dintre cei doi conductori este de atracție dacă cei doi curenți sunt de același sens, așa cum se poate vedea în fig.4.26. Dacă cei doi curenți sunt de sens contrar, forța este de respingere. Cauza acestei forțe de interacțiune este faptul că fiecare curent electric generează în jurul său un câmp magnetic. În consecință, fiecare câmp magnetic acționează asupra celuilalt conductor parcurs de curent electric.

Pe cale experimentală, Ampère a stabilit valoarea forței de interacțiune dintre cei doi conductori, paraleli de lungime infinită, pe o porțiune de lungime comună  $l$ :

$$F = \mu \frac{I_1 I_2}{2 \pi d} l \quad (4.57)$$

unde  $\mu = \mu_0 \mu_r$ .

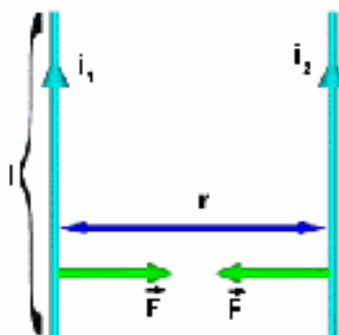


Fig.4.25. Forța de interacțiune dintre doi curenți paraleli de același sens.

Relația (4.57) este utilizată pentru definiția unității de intensitate a curentului electric,  $[I]_{SI} = 1$  Ampère. 1 A reprezintă intensitatea unui curent electric constant care, dacă circulă prin două conductoare electrice paralele de lungime infinită, situate în vid la distanța de un metru unul de altul, determină ca forța de interacțiune dintre ele să fie de  $2 \cdot 10^{-7}$  Newtoni pe fiecare metru de lungime comună.

#### 4.3.7. Legea circuitului magnetic

Se consideră un mediu omogen ( $\mu = \text{constant}$ ) în care se află un contur plan ce înconjoară un conductor foarte lung parcurs de curent electric cu intensitatea  $I$  (vezi fig.4.27). Acest curent electric crează în jurul său, la distanța  $r$  de el, un câmp magnetic de intensitate  $\vec{H}$ .

Ampère a calculat circulația vectorului intensitate a câmpului magnetic,  $\vec{H}$ , pe conturul  $(C)$ , câmp magnetic produs de curentul electric din circuit, scriind astfel *legea circuitului magnetic*. Această lege afirmă că: vectorul intensitate a câmpului magnetic are circulația pe un contur închis egală cu intensitatea curentului electric:

$$\oint_{(C)} \vec{H} d\vec{l} = I \quad (4.58)$$

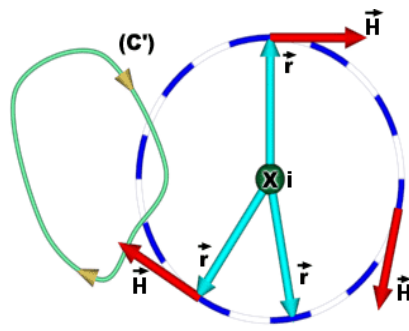


Fig.4.27. Circulația vectorului  $\vec{H}$  produs de un curent liniar infinit lung,  $I$ .

În cazul în care conturul  $(C)$  nu înconjoară complet curentul, circulația lui  $\vec{H}$  este zero pe acest contur. Acesta este și cazul din fig.4.27.

Introducem vectorul *densitate de curent electric*,  $\vec{j}$ , prin definiția:

$$j = \frac{dI}{dS} \quad (4.59)$$

Densitatea de curent electric este un vector orientat normal la suprafața considerată, în sensul în care circulă curentul electric. Intensitatea curentului electric se determină prin operația de integrare pe suprafața a densității de curent:

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (4.60)$$

Folosind formula lui Stokes, transformăm integrala de linie într-o integrală de suprafață (această suprafață sprijinindu-se pe conturul considerat). Obținem astfel o altă formă a legii circuitului magnetic:

$$\oint_{(C)} \vec{H} d\vec{l} = \iint_{S_c} (\nabla \times \vec{H}) d\vec{S} \quad (4.61)$$

unde  $\nabla \times \vec{H}$  reprezintă rotorul vectorului  $\vec{H}$ . Înlocuim în (4.58) relațiile (4.60) și (4.61) și obținem:

$$\oint_{(C)} \vec{H} d\vec{l} = \iint_{S_c} (\nabla \times \vec{H}) d\vec{S} = I = \iint_{S_c} \vec{j} d\vec{S} \quad (4.61)$$

Cantitățile de sub integralele de suprafață sunt egale, adică putem scrie:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} \quad (4.62)$$

Dacă se exprimă relația anterioară utilizând inducția magnetică, se obține:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j} \quad (4.63)$$

Ultimele două relații constituie forma locală a legii lui Ampère. În același timp, ele constituie o parte a ecuației a treia a lui Maxwell.

*Operația de rotor.* Prin definiție, *rotorul* unui vector se obține prin operația:

$$\text{rot } \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \quad (4.64)$$

unde  $H_x$ ,  $H_y$  și  $H_z$  sunt componentele vectorului  $\vec{H}$ .

Vectorul  $\text{rot } \vec{H} = \nabla \times \vec{H}$  într-un punct reprezintă un vector perpendicular pe planul ce trece prin punctul considerat. Mărimea lui este egală cu valoarea limită a circulației pe unitatea de arie a planului din jurul punctului considerat.

*Semnificația fizică a rotorului.* Așa cum am văzut în subparagraful 4.2.4., divergența unui vector reprezintă viteza de variație a componentei vectorului pe direcția sa (de exemplu  $\frac{\partial B_x}{\partial x}$ ). În ceea ce privește rotorul, acesta reprezintă "viteze de variație" a componentei vectorului în direcție transversală (de exemplu, vitezele de variație ale componentei  $B_x$ , după direcțiile  $y$  și  $z$ ).

#### 4.3.8. Inducția electromagnetică. Legea Faraday

În anul 1831 Faraday descoperă pe cale experimentală fenomenul de inducție electromagnetică. Astfel, el constată că un flux magnetic variabil prin suprafața formată de o buclă de conductor determină apariția unei tensiuni electromotoare în bucla conductoare. Tensiunea electromotoare ce apare în buclă se numește *tensiune electromotoare indusă*. Apariția unui curent electric, numit *curent indus*, prin buclă poate fi pusă în evidență prin instalarea unui ampermetru în circuitul buclei, așa cum se poate vedea în fig. 4.28. Când magnetul se mișcă, ampermetrul indică trecerea unui curent electric.

Fenomenul de apariție a tensiunii electromotoare induse printr-un circuit închis prin a cărei suprafață se produce un flux magnetic variabil, se numește *inducție electromagnetică*.

Inducția electromagnetică este fenomenul general de apariție a unui câmp electric în regiunea din spațiu în care se manifestă un flux magnetic variabil. Acest fenomen nu este legat de prezența unui conductor sau a unui circuit electric. Câmpul electric indus apare oriunde se manifestă fluxul magnetic variabil (chiar și în vid, unde sarcinile electrice lipsesc).

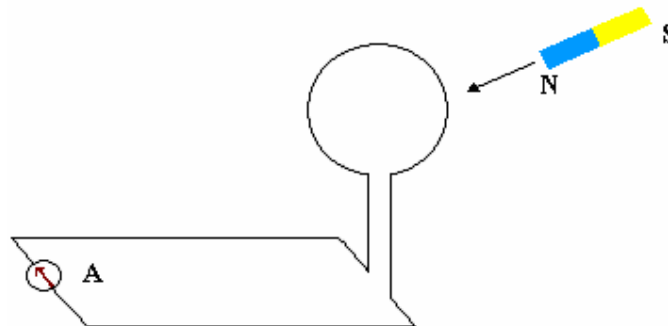


Fig. 4.28. În timpul mișcării magnetului ampermetrul indică trecerea unui curent electric.

Prin definiție, *fluxul magnetic* reprezintă produsul scalar dintre vectorul inducție magnetică și vectorul  $\vec{S} = S\vec{n}$ , unde  $\vec{n}$  este versorul normal la suprafață:

$$\Phi = \vec{B}\vec{S} = BS\cos\alpha \quad (4.65)$$

Faraday a observat că tensiunea electromotoare indusă crește când viteza de variație a fluxului magnetic crește și a enunțat legea inducției electromagnetice în felul următor:

Tensiunea electromotoare indusă într-un contur (C) este egală cu viteza de variație a fluxului printr-o suprafață deschisă ce se sprijină pe (C) și este de sens opus acestei variații.

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\vec{B}\vec{S})}{dt} \quad (4.66)$$

Semnul (-) este determinat de faptul că întotdeauna sensul tensiunii induse este astfel încât, prin câmpul magnetic pe care-l generează la rândul său, să se opună sensului de variație al fluxului magnetic inductor (Legea lui Lenz).

În cazurile cele mai generale fluxul magnetic se calculează prin integrarea fluxurilor elementare produse prin arii infinitezimale  $dS$ , prin care inducția magnetică poate fi considerată constantă.

$$d\Phi = \vec{B}d\vec{S} = B \cos \alpha dS \quad (4.67)$$

Fig. 4.29 ilustrează un contur (C) și o suprafață oarecare deschisă, S, ce se sprijină pe acesta. Suprafața a fost împărțită în arii infinitezimale,  $dS$ .

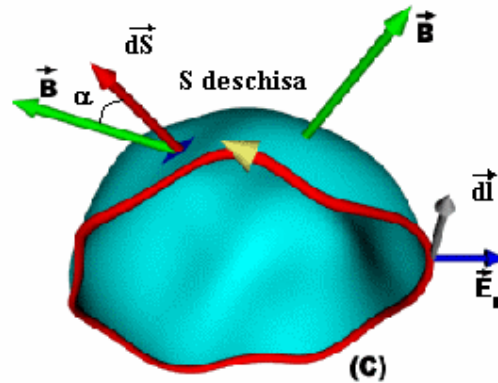


Fig. 4.29. Fluxul magnetic variabil și câmpul electric indus de acesta.

Tensiunea electromotoare indusă este, pe de altă parte, egală cu circulația vectorului intensitate a câmpului electric:

$$e = \oint_{(C)} \vec{E} d\vec{l} \quad (4.68)$$

unde  $d\vec{l}$  este un vector infinitezimal mic în lungul conturului (C).

Fluxul magnetic prin suprafața S este dat de integrarea relației (4.67) pe toată suprafața:

$$\Phi = \iint_S d\Phi = \iint_S \vec{B}d\vec{S} \quad (4.69)$$

Dacă folosim teorema lui Stokes, putem transforma integrala de linie dată de (4.68) într-o integrală de suprafață din rotorul intensității câmpului electric,  $\vec{E}$ :

$$\mathbf{e} = \oint_{(C)} \vec{E} \, d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) d\vec{S} \quad (4.70)$$

Tensiunea electromotoare indusă este egală cu derivata la timp a fluxului magnetic, dat de (4.69):

$$\mathbf{e} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \iint_S \vec{B} d\vec{S} \right) = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \quad (4.71)$$

unde am trecut la derivate parțiale deoarece mărimile implicate pot depinde și de coordonate.

Astfel, relațiile (4.70) și (4.71) se referă al tensiunea electromotoare indusă și, de aceea, cantitățile de sub integralele de suprafață sunt egale:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.72)$$

Am obținut astfel, o altă formă a legii inducției electromagnetice, numită și forma locală, și, în același timp, cea de-a patra ecuație a lui Maxwell.

Un exemplu de inducție electromagnetică este cel din cazul circuitului cu arie variabilă, aflat în câmp magnetic constant, așa cum se poate vedea în fig. 4.30.a). Cadrul conductor dreptunghiular, cu o latură mobilă, se află într-un câmp magnetic de inducție  $\vec{B}$ . Latura mobilă are lungimea  $l$ , iar câmpul magnetic este perpendicular pe suprafața cadrului și este constant. Viteza de mișcare a laturii  $l$  este constantă. Aria aflată în câmp magnetic crește (sau scade) pe măsură ce latura mobilă se deplasează, deci fluxul magnetic prin suprafața închisă de cadru este variabil în timp.

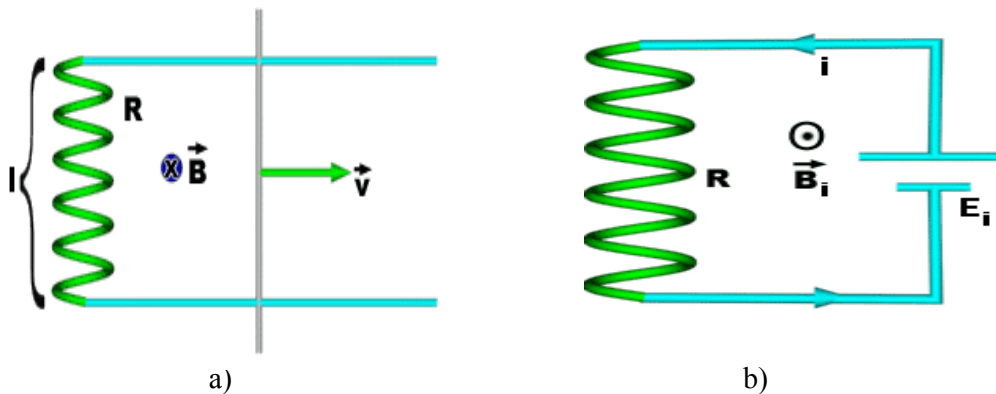


Fig. 4.30. Inducție electromagnetică într-un cadru dreptunghiular cu o latură mobilă.

Circuitul este echivalent celui din fig. 4.30.b), deoarece în el se induce o tensiune electromotoare datorită variației fluxului magnetic:



$$\Phi = \vec{B} \vec{S} = BS = B l v t \quad (4.73)$$

deoarece am presupus că la  $t = 0$  latura mobilă era lipită de rezistență.

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(Blvt)}{dt} = -B l v \quad (4.74)$$

Observăm că datorită curentului electric indus în circuit, apare un câmp magnetic indus,  $\vec{B}_i$ , și care este de sens opus câmpului magnetic inductor,  $\vec{B}$ .

**Autoinducția.** Fenomenul de inducție electromagnetică într-o bobină datorită variației curentului electric ce o străbate se numește autoinducție. Să considerăm o bobină prin care trece un curent variabil în timp,  $i = f(t)$ , ca în fig. 4.31. Tensiunea ce apare la capetele bobinei, datorită variației curentului electric prin ea, este de forma:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt} \quad (4.75)$$

unde  $L$  este *inductanța* bobinei și care este egală cu:

$$L = \mu \frac{N^2 S}{l} \quad (4.76)$$

unde  $N$  este numărul de spire,  $l$  este lungimea, iar  $S$  este secțiunea bobinei.

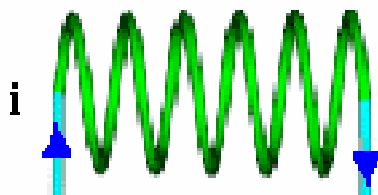


Fig. 4.31. Bobină parcursă de un curent variabil,  $i = f(t)$ .

Orice circuit electric poate fi caracterizat prin mărimea numită *inductanță proprie*. Inductanța unui circuit depinde de mărimea circuitului, de formă, de numărul de spire și de proprietățile magnetice ale mediului în care se manifestă câmpul magnetic. De exemplu, inductanța unui solenoid poate fi mult

mai mare decât cea corespunzătoare vidului, prin introducerea unui miez de fier, care are o permeabilitate magnetică relativă  $\mu_r = 700$ .

#### 4.3.9. Energia câmpului magnetic

Considerăm un circuit electric, ca în fig. 4.32, ce conține o bobină, cu inductanța  $L$ , și o sursă de tensiune electromotoare constantă,  $E$ . La închiderea circuitului, într-un timp scurt intensitatea curentului crește de la valoarea zero la valoarea sa maximă.

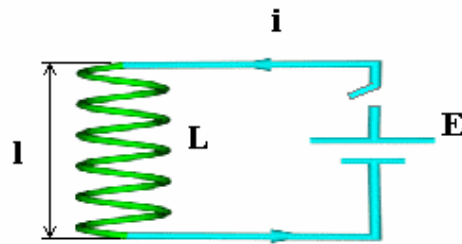


Fig. 4.32. Circuit electric cu bobină.

În acest interval de timp există o variație a fluxului magnetic din bobină,  $\Phi = L i$ . Apare deci o tensiune electromotoare autoindusă în bobină, dată de relația (4.75). Tensiunea la bornele bobinei devine:

$$U = -e = L \frac{di}{dt} \quad (4.77)$$

Sursa exterioară furnizează o putere  $P = U i$ , care în intervalul de timp  $dt$  crește curentul cu  $di$ . Creșterea de energie este:

$$dW = P dt = U i dt = i L \frac{di}{dt} dt = L i di \quad (4.78)$$

Energia totală furnizată de sursă, pentru a crește curentul de la zero până la valoarea maximă  $I$ , este:

$$W = \int_0^I L i di = \frac{1}{2} L I^2 \quad (4.79)$$

Această energie este înmagazinată în câmpul magnetic din bobină. Inducția câmpului magnetic din bobină este:

$$B = \mu \frac{N I}{l} \quad (4.80)$$

de unde rezultă că intensitatea curentului electric din bobină este:

$$I = \frac{B l}{\mu N} \quad (4.81)$$

Substituim intensitatea curentului electric din relația (4.81) în (4.79) și obținem energia câmpului magnetic din bobină:

$$W = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} S l \quad (4.82)$$

Densitatea de energie magnetică reprezintă cantitatea de energie din unitatea de volum:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad (4.83)$$

deoarece volumul bobinei este  $V = S l$ .

Dacă utilizăm intensitatea câmpului magnetic, obținem pentru densitatea de energie magnetică expresia:

$$w = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad (4.84)$$

Observăm că densitatea de energie din câmpul magnetic este echivalentă densității de energie din câmpul electrostatic, dată de relația (4.42).

#### 4.3.10. Curenți de conducție și curenți de deplasare

Să considerăm un condensator plan cu armăturile în vid, care a fost încărcat cu sarcini electrice de la o sursă exterioară, așa cum se poate vedea în fig. 4.33. Apoi condensatorul se descarcă pe o rezistență electrică. Electronii se deplasează prin conductorii de legătură spre cealaltă armătură, unde se neutralizează cu sarcinile electrice de semn opus, creând curentul de conducție, de intensitate  $I_c$ . Reamintim că, prin convenție, sensul curentului electric este cel care ar corespunde deplasării sarcinilor electrice pozitive. Din această cauză câmpul electric din interiorul condensatorului scade în timp, astfel încât după descărcarea condensatorului  $\vec{E} = 0$ . Putem defini această scădere printr-o derivată parțială la timp a intensității câmpului electric diferită de zero,  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq 0$ . Apare, din acest motiv, un curent electric, numit *curent de deplasare*, a cărui existență nu se datorează circulației sarcinilor electrice, ci variației intensității câmpului electric la timp.

Densitatea curentului de deplasare este dată de relația lui Maxwell, în așa fel încât curentul care iese din fiecare armătură să fie egal cu cel care intră în ea:

$$\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.85)$$

În felul acesta s-a pus în evidență un curent ce se propagă și prin vid, curent observat pentru prima dată de către James Clerk Maxwell.

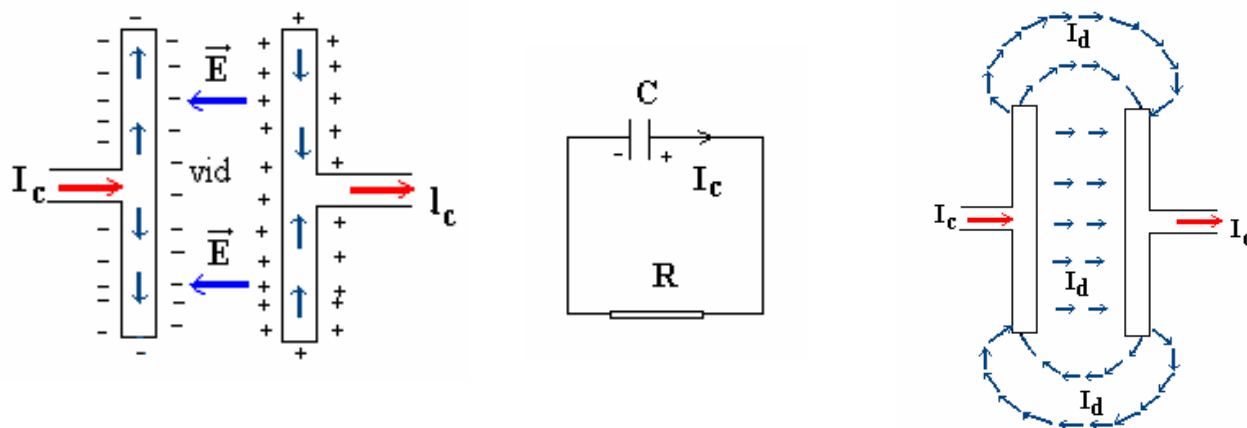


Fig. 4.33. Descărcarea condensatorului într-un circuit electric:

$I_c$  - curent de conducție,  $I_d$  - curent de deplasare.

Maxwell este autorul renumitului termen suplimentar din ecuația locală a lui Ampère (4.63), care devine, în forma sa generalizată:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_c + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.86)$$

În această formă, relația (4.86) constituie ultima ecuație din sistemul de patru ecuații ale lui Maxwell pentru electromagnetism.

Intensitatea curentului de deplasare se determină prin integrarea relației (4.85). Dacă mediul de propagare nu este vidul, atunci atât în definiția (4.85) cât și în ecuația (4.86) a lui Maxwell, se folosește permitivitatea mediului,  $\varepsilon$ , în locul permitivității vidului,  $\varepsilon_0$ . Definiția generalizată a curentului dată de Maxwell nu constituie un artificiu de calcul pentru cazul în care nu există sarcini electrice de conducție. Curenții de deplasare generează și ei câmpuri magnetice în jurul lor, în același mod ca și curenții de conducție. De exemplu, între armăturile condensatorului considerat în fig. 4.33. curentul de deplasare generează un câmp magnetic.

#### 4.4. Unde electromagnetice

Analiza câmpurilor electrice și magnetice, efectuată în paragrafele anterioare ale acestui capitol, a presupus că acestea nu variază în timp. Astfel, aceste câmpuri, numite câmp electrostatic și magnetostatic, sunt variabile în spațiu, dar sunt constante în timp. În cazul unor distribuții de sarcini electrice variabile în timp și a unor curenți electrice variabili în timp, nu mai este posibil să tratăm câmpurile generate de sarcinile electrice și de curenții electrice în mod independent. În spațiul din vecinătatea unui câmp electric variabil în timp ia naștere un câmp magnetic variabil în timp, așa cum se întâmplă la încărcarea sau descărcarea unui condensator, de exemplu. În mod similar, un câmp magnetic variabil în timp se comportă ca o sursă de câmp electric, așa cum de întâmplă în fenomenul de inducție electromagnetică. Ansamblul de câmpuri electrice și magnetice, ce se generează reciproc în timp se numește *câmp electromagnetic*.

Propagarea unui ansamblu de variații ale câmpurilor electric și magnetic generează o *undă electromagnetică*.

Unda electromagnetică transportă energia electromagnetică în spațiu cu viteză finită și constantă. Undele electromagnetice sunt unde transversale, adică propagarea câmpurilor electric și magnetic se face în așa fel încât vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  sunt perpendiculari unul pe celălalt și perpendiculari pe direcția de propagare a undelor. Funcțiile de undă ale unei electromagnetice sunt vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$ , care sunt

dependenți de coordonate și de timp. În continuare vom folosi toate proprietățile undelor elastice, care se aplică și undelor electromagnetice.

Viteza cu care se propagă undele electromagnetice este finită și constantă. În vid, viteza de propagare a undelor electromagnetice este:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (4.87)$$

unde  $\epsilon_0$  și  $\mu_0$  sunt permitivitatea dielectrică și, respectiv, permeabilitatea magnetică ale vidului. Aceasta constituie viteza luminii în vid, viteză neegalată de nici un corp fizic.

Dacă propagarea undei se face într-un alt mediu decât vidul, viteza de propagare a undei se reduce, conform relației:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n} \quad (4.88)$$

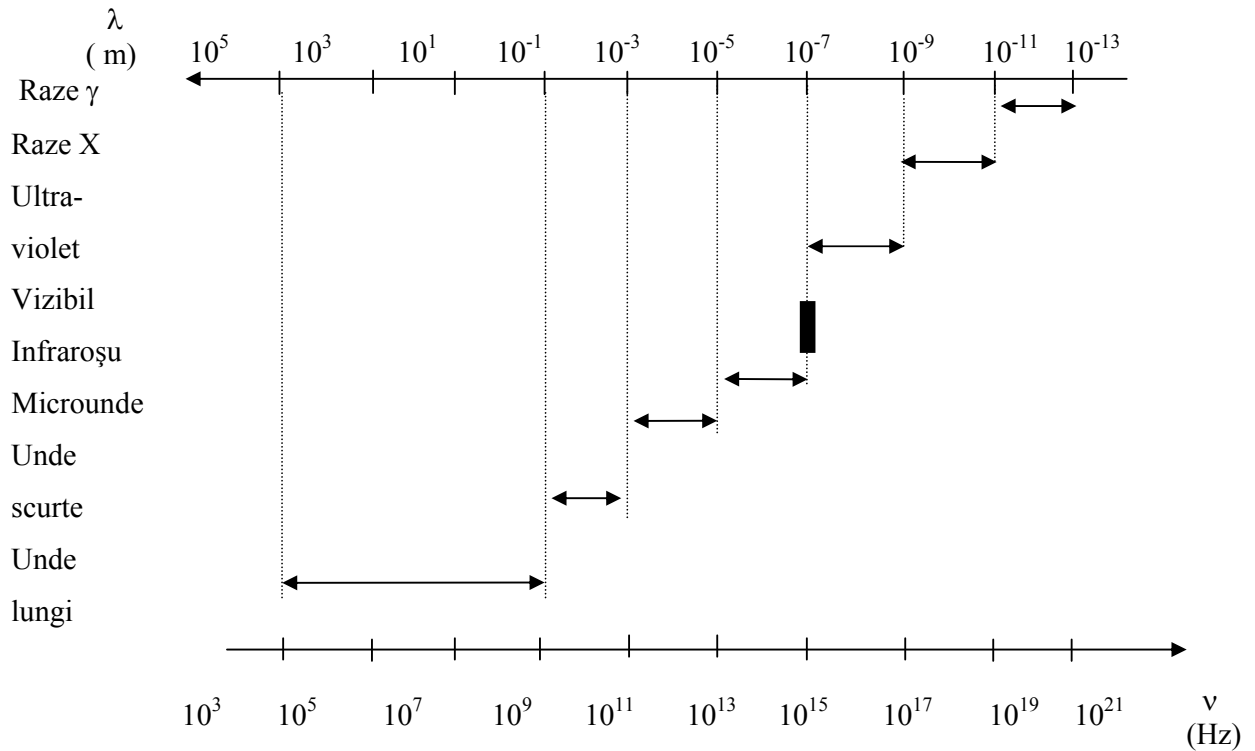
unde  $\epsilon_r$  reprezintă permitivitatea dielectrică relativă,  $\mu_r$  este permeabilitatea magnetică relativă, iar  $n$  este indicele de refracție al mediului de propagare. *Indicele de refracție al mediului de propagare*,  $n$ , reprezintă numărul ce indică de câte ori se reduce viteza undelor electromagnetice în mediul respectiv, față de viteza lor din vid.

*Spectrul undelor electromagnetice.* Undele electromagnetice se întind pe un domeniu de lungimi de undă foarte extins, de la lungimi de undă mai mici decât  $10^{-13}$  m, până la valori ale lungimii de undă de peste  $10^5$  m. În diagrama 4.1 sunt prezentate domeniile de lungimi de undă ale undelor electromagnetice.

În realitate spectrul undelor electromagnetice nu are limite cunoscute, nici inferioare, nici superioare. Așa cum se poate vedea în diagrama de mai jos, sectorul îngust de lungimi de undă din intervalul  $\lambda \in [350, 750] \cdot 10^{-9}$  m formează domeniul vizibil pentru ochiul uman. Acest sector al spectrului undelor electromagnetice este reprezentativ pentru ceea ce numim *lumină*.

Toate corpurile emit radiații electromagnetice, ca urmare a mișcării termice a moleculelor lor. Această radiație este numită *radiație termică*. Un corp cu temperatura de 300 K ( $0^\circ \text{C} = 273 \text{K}$ ) emite radiație electromagnetică infraroșie, invizibilă pentru ochiul uman. La temperaturi ridicate, corpurile emit radiații ce au componente din domeniul de lungimi de undă ale sectorului vizibil. Cu cât temperatura lor crește, cu atât sursele de radiație devin mai strălucitoare, emițând unde electromagnetice din domeniul vizibil, către ultraviolet.

Diagrama 4.1. Spectrul undelor electromagnetice



Astfel, putem afirma că sursele naturale de radiații electromagnetice emit unde electromagnetice formate din suprapunerea unor radiații monocromatice. Lumina albă este rezultatul suprapunerii undelor luminoase având lungimi de undă cuprinse între  $\lambda_v = 350$  nm (unda monocromatică corespunzătoare culorii violet) și  $\lambda_r = 750$  nm (unda monocromatică corespunzătoare culorii roșu).

#### 4.4.1. Unde armonice progresive

Undele armonice sau sinusoidale sunt unele dintre cele mai răspândite tipuri de unde electromagnetice, ele fiind foarte asemănătoare undelor elastice. În orice punct din spațiu vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  sunt funcții sinusoidale de timp, iar în orice moment de timp, vectorii sunt, de asemenea, funcții sinusoidale de coordonate.

Considerăm o undă electromagnetică monocromatică armonică progresivă liniar polarizată ce se propagă în vid, în lungul axei Oz (vezi fig. 4.34.). În sursa undei funcțiile ei de undă sunt de forma:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega t \\ \vec{B} = \vec{B}_0 \sin \omega t \end{cases} \quad (4.89)$$

Atunci, într-un punct situat la distanța  $z$  de sursă, funcțiile de undă sunt de forma:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \sin \left[ \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \right] = \vec{E}_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) \\ \vec{B} = \vec{B}_0 \sin \left[ \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \right] = \vec{B}_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) \end{cases} \quad (4.90)$$

unde am folosit relațiile deduse în capitolul 3 pentru cazul undelor elastice.

În fig. 4.34 se poate vedea variația armonică a vectorilor  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  în spațiu, la un moment dat de timp. Putem afirma că această figură s-ar putea vedea dacă unda ar fi "fotografiată" cu un aparat care surprinde vectorii de undă la un moment precis. Astfel, cei doi vectori variază în fază, atingând simultan valorile maxime sau minime. Într-un punct de pe axa de propagare și la un moment dat, vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  îndeplinesc condiția:

$$\vec{E} = c \vec{B} \quad (4.91)$$

Se poate observa că vectorii sunt perpendiculari între ei și perpendiculari pe direcția de propagare a undei. Unda electromagnetică este liniar polarizată deoarece fiecare vector al câmpului vibrează într-o singură direcție. Frontul de undă este plan, fiind format din planul vectorilor  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$ .



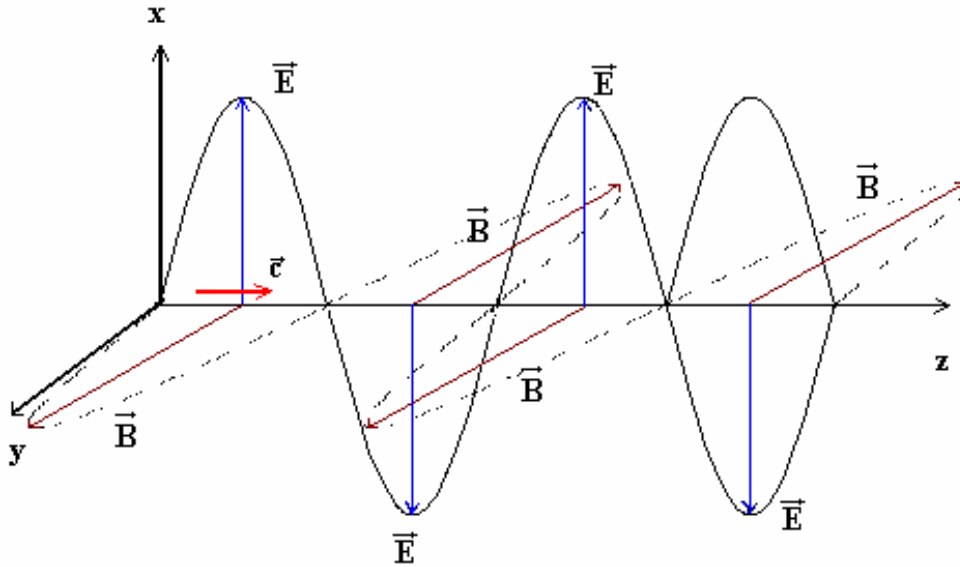


Fig. 4.34. Unda plană monocromatică liniar polarizată.

Frecvența,  $\nu$ , lungimea de undă,  $\lambda$ , și viteza de propagare,  $c$ , sunt legate între ele prin relația:

$$\lambda = c T = \frac{c}{\nu}$$

Reamintim că altă mărime importantă pentru caracterizarea undelor este *numărul de undă*,  $k$ , definit prin relația:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Numărul de undă,  $\vec{k}$ , este un vector orientat în sensul propagării undei.

#### 4.4.2. Energia undelor electromagnetice

*Energia electromagnetica* constituie suma energiilor electrică și magnetică.

*Densitatea de energie electromagnetica*.  $w$ , transportată de undă reprezintă suma densităților de energie electrică și magnetică:

$$w = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} H^2 \right) \quad (4.92)$$

*Fluxul de energie* transportată de unda electromagnetica reprezintă cantitatea de energie electromagnetica ce traversează unitatea de suprafață normală la direcția de propagare în unitatea de timp. Acest flux de energie electromagnetica este descris de vectorul lui Poynting:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{E} \times \vec{H} \quad (4.93)$$

Vectorul Poynting este normal pe planul format de vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  și are direcția de propagare a undei electromagnetice.

Modulul vectorului Poynting se determină ținând cont de relația (4.91) și de faptul că vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  sunt perpendiculari între ei:

$$S = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 \quad (4.94)$$

Având în vedere că într-o undă liniar polarizată vectorii de câmp vibrează fiecare pe câte o direcție și utilizând notațiile din fig.4.34, transformăm funcțiile de undă date de relația (4.90) sub forma:

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0 \sin \left[ \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \right] \vec{i} = E_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) \vec{i} \\ \vec{B} = B_0 \sin \left[ \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \right] \vec{j} = B_0 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) \vec{j} \end{cases} \quad (4.95)$$

Ne propunem să calculăm densitatea de energie a unei unde monocromatice liniar polarizate, ale cărei funcțiile de undă sunt date de (4.90). Substituim (4.90) în (4.92) și obținem:

$$w = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t - kz) + \frac{1}{\mu_0} B_0^2 \sin^2(\omega t - kz) \right)$$

Folosind relația (4.91) obținem expresia:

$$w = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t - kz) + \frac{1}{\mu_0} \frac{E_0^2}{c^2} \sin^2(\omega t - kz) \right) = \frac{1}{2} E_0^2 \sin^2(\omega t - kz) \left( \epsilon_0 + \frac{1}{\mu_0 c^2} \right)$$

Utilizăm definiția vitezei undelor electromagnetice în vid și calculăm densitatea de energie electromagnetică:

$$w = \frac{1}{2} E_0^2 \sin^2(\omega t - kz) \left( \epsilon_0 + \mu_0 \epsilon_0 \frac{1}{\mu_0} \right) = \epsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t - kz) \quad (4.96)$$

Calculăm fluxul de energie electromagnetică, folosind definiția vectorului Poynting, și obținem, pentru undele electromagnetice monocromatice liniar polarizate:

$$S = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} [E_0 \sin(\omega t - kz) B_0 \sin(\omega t - kz)] = \frac{1}{\mu_0} E_0^2 \frac{1}{c} \sin^2(\omega t - kz)$$

Transformăm relația anterioară și obținem expresia vectorului Poynting al undei electromagnetice monocromatice liniar polarizate:

$$S = \frac{c}{c^2 \mu_0} E_0^2 \sin^2(\omega t - kz) = \epsilon_0 c E_0^2 \sin^2(\omega t - kz) = w c \quad (4.97)$$

Să observăm faptul că fluxul de energie electromagnetică este egal cu produsul densității de energie cu viteza undelor electromagnetice.

#### 4.4.3. Unde sferice

În medii omogene și izotrope unda electromagnetică se propagă în toate direcțiile în jurul sursei. Pentru distanțe mari față de sursă se poate considera că dimensiunile sursei sunt neglijabile, deci că sursa este punctiformă. Dacă notăm cu  $\Psi$  vectorul de undă al undelor sferice, adică unul din vectorii  $\vec{E}$  sau  $\vec{B}$ , atunci ecuația undei sferice are forma:

$$\Psi(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)} \quad (4.98)$$

unde  $A$  este amplitudinea undei în sursă, iar  $r$  este distanța la care este exprimată funcția de undă. Astfel, datorită faptului că amplitudinea undelor sferice scade cu distanța de la sursă, putem vorbi de o amortizare a undelor sferice cu distanța,  $r$ .

Undele ce se propagă din surse punctiforme sunt unde sferice, au suprafețele de undă de formă sferică centrate în punctul unde este sursa, iar frontul undei este tot o sferă.

#### 4.4.4. Teoria electromagnetică macroscopică a luminii

Lumina vizibilă este acel domeniu al spectrului undelor electromagnetice din intervalul de lungimi de undă  $\lambda \in [350, 750]$  nm. În fenomene precum *interferența, difracția, reflexia și refracția, dispersia, absorbția și polarizarea* undelor luminoase se poate vorbi de *caracterul ondulatoriu al undelor electromagnetice*. Aceste fenomene sunt descrise de *teoria macroscopică a luminii*.

Undele electromagnetice formează numai una din formele de manifestare a interacțiunilor electromagnetice. La scară microscopică, între atomi de exemplu, interacțiunile electromagnetice se prezintă sub o formă specială, corpusculară. Numim *fotoni* particulele (corpusulii) care realizează interacțiunile, la nivel atomic sau subatomic. Fenomene precum sunt *efectul fotoelectric, efectul Compton, radiația termică, interacțiunile cu atomii, nucleele sau particulele elementare* vor fi analizate în capitolul următor, utilizând *ipoteza corpusculară asupra luminii* (Mecanica cuantică). În continuare vom analiza câteva aspecte relevante ale teoriei macroscopice a luminii.

##### **I. Interferența luminii**

*Interferența* este fenomenul general al suprapunerii undelor în spațiu. În anumite condiții rezultatul interferenței este o undă staționară, caracterizată de *maxime și minime de interferență*. Condiția necesară pentru interferență este ca undele să fie *coerente*. Acest aspect se referă la *diferența de fază* dintre undele care interferă: pentru ca două unde să fie coerente, diferența lor de fază trebuie să fie independentă de timp.

*Dispozitivul lui Young*. Într-un paravan vertical sunt practicate două deschideri, așezate simetric față de o axă de simetrie, SO. S constituie sursa punctiformă a unei unde electromagnetice monocromatice sferice, așa cum se poate vedea în fig. 4.35. Deschiderile din paravan formează două surse secundare de lumină, ce se propagă de partea cealaltă a acestui paravan. Distanța dintre sursele  $S_1$  și  $S_2$  este  $2l$ . Deoarece aparțin aceleiași front de undă, sursele  $S_1$  și  $S_2$  sunt surse coerente, de aceea emit unde de aceeași amplitudine și care sunt în fază. Pe un ecran vertical, situat la distanța  $D$ , se formează o undă staționară, ce se prezintă sub forma unei *figuri de interferență*. Undele emise de cele două surse parcurg distanțe diferite,  $r_1$  și  $r_2$ , până în punctul P, de aceea ele vor avea faze diferite în P. În punctul P funcțiile de undă ale celor două unde sunt:

$$E_1(r, t) = E_0 \sin(\omega t - kr_1) \quad (4.99.a)$$

$$E_2(r, t) = E_0 \sin(\omega t - kr_2) \quad (4.99.b)$$

Diferența de fază în P dintre cele două unde este:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) \quad (4.100)$$

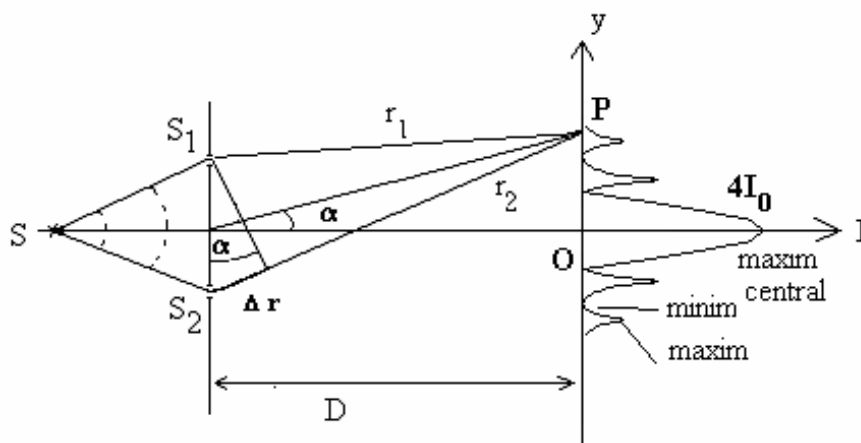


Fig. 4.35. Dispozitivul lui Young.

Rezultatul suprapunerii celor două unde în punctele de pe ecran generează o undă staționară, al cărei vector de undă este de forma:

$$E_{\text{rez}} = 2E_0 \cos\left(\frac{k(r_2 - r_1)}{2}\right) \sin\left(\omega t - \frac{k(r_2 + r_1)}{2}\right) \quad (4.101)$$

Amplitudinea undei rezultante din punctul P este:

$$E_{\text{rez}} = 2E_0 \cos\left(\frac{k(r_2 - r_1)}{2}\right) \quad (4.102)$$

După cum observăm, amplitudinea undei rezultante depinde de diferența de drum,  $\Delta r = r_2 - r_1$ , deci depinde de diferența de fază, dată de relația (4.100).

Astfel, unda rezultantă este modulată în amplitudine, în diferite puncte de pe ecran obținându-se maxime sau minime de interferență:

a). În punctele de pe ecran în care se întâlnesc unde a căror diferență de drum are astfel de valori încât diferența de fază devine:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = 0, \pi, 2n \frac{\pi}{2}$$

se va obține un *maxim de interferență*, deoarece în aceste puncte are loc relația:

$$\cos\left(\frac{k(r_2 - r_1)}{2}\right) = \cos(2n \frac{\pi}{2}) = 1.$$

Amplitudina devine  $E_{rez} = 2 E_0$ . Dacă diferența de fază dintre undele care interferă este un multiplu par de  $\pi/2$ , atunci diferența de drum dintre cele două unde este:

$$\Delta r = r_2 - r_1 = 2n \frac{\lambda}{2} \quad (4.103)$$

Relația (4.103) se numește *condiția de maxim de interferență*. În punctele de maxim de interferență se obține o undă luminoasă cu intensitatea  $I_{rez} = 4 I_0$ .

b). În punctele de pe ecran în care se întâlnesc unde a căror diferență de drum are astfel de valori încât diferența de fază devine:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = \frac{\pi}{2}, \dots, (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

se va obține un *minim de interferență* deoarece, în acest caz, are loc relația:

$$\cos\left(\frac{k(r_2 - r_1)}{2}\right) = \cos(2n + 1) \frac{\pi}{2} = 0.$$

Amplitudina devine  $E_{rez} = 0$ . Dacă diferența de fază dintre cele două unde care interferă este un multiplu impar de  $\pi/2$ , atunci diferența de drum dintre cele două unde este:

$$\Delta r = r_2 - r_1 = (2n + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (4.104)$$

Relația (4.104) se numește *condiția de minim de interferență*. În punctele de minim de interferență de pe ecran se obține o anihilare a undelor,  $I_{rez} = 0$ , adică întuneric.

Pe ecran se obține o succesiune de maxime și minime de interferență, numite *franje de interferență*. Distanța dintre două maxime de interferență se numește *interfranji*.

## II. Difracția luminii

Termenul de *difracție* se aplică fenomenelor în care ne interesează efectul rezultat produs de o porțiune limitată a frontului de undă. Din punct de vedere fizic nu există nici o deosebire între interferență și difracție.

*Principiul lui Huygens*. Sursa punctiformă S produce în punctul M același efect ca o repartiriție uniformă de surse elementare, punctiforme,  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ , dispuse pe suprafața frontului de undă. Undele elementare sferice vor da prin interferență o undă rezultantă ce ajunge în punctul M. În fig. 4.36 se poate vedea frontul pe care se află sursele elementare și noul front al undei, în punctul M.

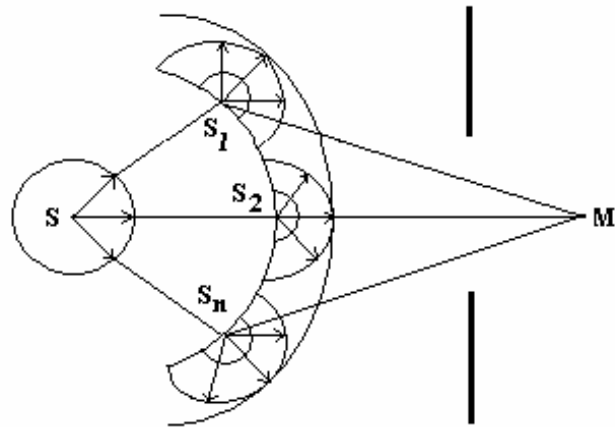


Fig. 4.36. Principiul lui Huygens.

Atunci când în calea unei luminoase se află obstacole, deschideri sau paravane, vorbim de fenomenul de difracție a luminii. Prin *difracție* se înțelege fenomenul de schimbare a direcției de propagare a unei la întâlnirea unor deschideri de lărgime finită. De fapt, difracția se produce numai dacă dimensiunea,  $L$ , a obstacolului este de ordinul de mărime al lungimii de undă a luminii,  $\lambda$ ,  $L \approx \lambda$ .

Un sistem destul de simplu pe care se produce fenomenul de difracție este *rețeaua de difracție*, prezentată în fig. 4.37. Ea constă dintr-o succesiune de zone opace și transparente practicate într-un paravan și aflate la distanța  $d$  una de alta. O undă plană cade normal pe rețea. Pe un ecran vertical se obține figura de difracție, care constă din maxime și minime de difracție. În fig.4.37 se poate vedea și intensitatea unei difractate în funcție de poziția pe ecran. Condiția de a obține în punctul P maximul de difracție de ordinul  $k$  al unei unde, de lungime de undă  $\lambda$ , este următoarea:

$$d \sin \alpha = k \lambda \quad (4.105)$$

unde  $d$  este constanta de rețea iar  $\alpha$  este unghiul sub care se vede punctul P din centrul de simetrie al sistemului. Pe axa de simetrie, datorită drumurilor egale, undele ajung în fază, deci aici se formează maximul de ordinul 1, indiferent de lungimea de undă a unei. Prin  $\delta$  s-a notat diferența de drum dintre undele reprezentate în figură.

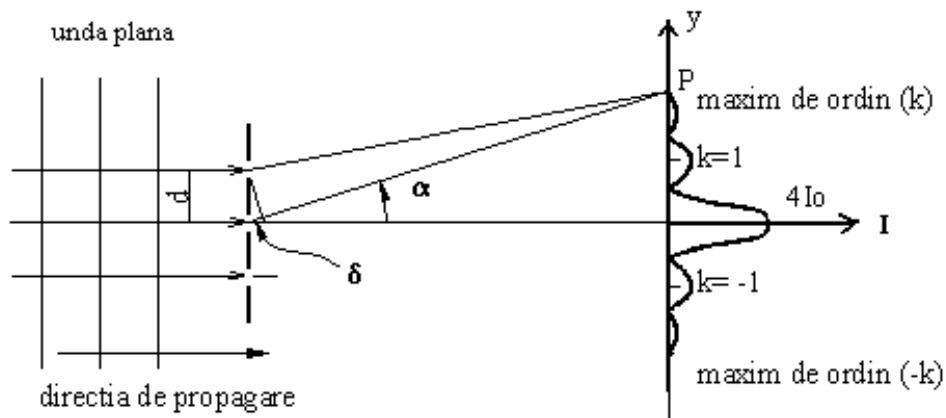


Fig. 4.37. Rețeaua de difracție.

Pentru a realiza condiția de difracție, o rețea trebuie să aibă constanta de rețea de ordinul de mărime al lungimii de undă a luminii, adică  $d \approx 10^{-7}$  m. De exemplu o rețea de difracție trebuie să aibă aproximativ 50000 de fante pe 1 cm.

O aplicație interesantă a difracției luminii se realizează când cristalele sunt bombardate cu Raze X. Lungimea de undă a radiațiilor electromagnetice X este de ordinul  $\lambda \cong 1 \text{ \AA}$ . De aceea singurele rețele de difracție potrivite pentru radiația X sunt rețelele cristaline. Un fascicol monocromatic de raze X este trimis pe un cristal, care poate fi de exemplu de NaCl și a cărui constantă de rețea cristalină este de ordinul  $\lambda \cong 2 - 3 \text{ \AA}$ . Figura de difracție a razelor X pe cristal este analoagă celei din fig. 4.37.

### III. Ghidul de undă

După cum știm, caracteristica definitorie a undelor este aceea că se propagă în spațiu, transmițând o anumită formă de energie. Prin intermediul unui dispozitiv special, numit *ghid de undă*, este posibilă transmiterea undelor electromagnetice. Să considerăm un ghid de undă de forma unui tub de secțiune dreptunghiulară, cu laturile  $a$  și  $b$ , și având rezistența electrică nulă. Distribuția câmpului electromagnetic de-a lungul tubului este reprezentată în fig. 4.38: în (1) sunt reprezentate liniile câmpului electric al undei prin ghidul de undă, atât în vedere laterală, cât și în secțiune transversală; în (2) se pot vedea liniile câmpului magnetic văzute de sus. Pentru a simplifica explicațiile, în (1) nu sunt reprezentate liniile de câmp magnetic, iar în (2) nu sunt cele ale câmpului electric al undei electromagnetice.



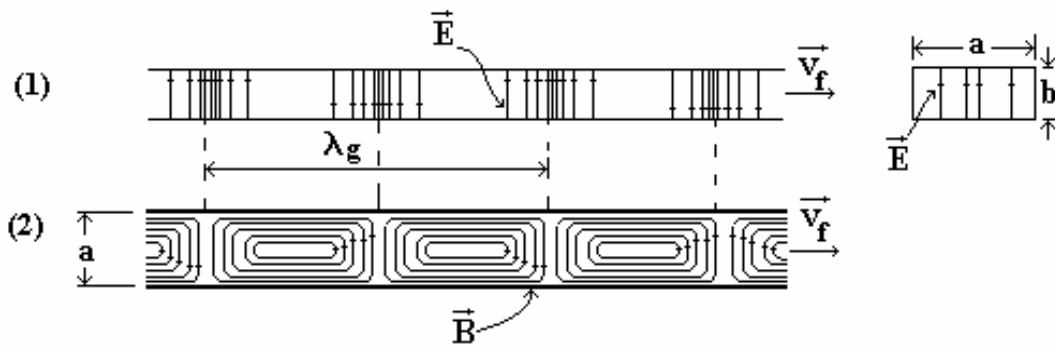


Fig. 4.38. Componentele unei electromagnetice la trecerea prin ghidul de undă.

Așa cum se observă în fig. 4.38, câmpul electric nu are componente tangențiale la suprafața interioară a ghidului de undă. Cele două componente,  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$ , ale unei electromagnetice sunt în fază, iar frecvența unei progresive poate fi continuu variată, pornind de la *frecvența de tăiere*,  $\omega_0$ , a modului de transmisie prin ghidul de undă. Un ghid de undă transmite unde electromagnetice într-un mod dat, dacă au frecvența mai mare decât *frecvența de tăiere pentru acel mod al ghidului*. În fig.4.38 se observă *modul dominant* al ghidului de undă de formă dreptunghiulară. Modul dominant corespunde celei mai mici frecvențe de tăiere. În practică, undele electromagnetice au o frecvență dată,  $\omega$ , de aceea pentru transmitere se alege acel ghid de undă ale cărui dimensiuni corespund unei frecvențe de tăiere pentru modul dominant  $\omega_0 < \omega$ , dar care este în același timp mai mică și decât toate frecvențele de tăiere pentru celorlalte moduri de transmitere.

Dacă rezistența electrică a ghidului de undă este nulă, atunci viteza de propagare a unei electromagnetice prin ghidul de undă este egală cu viteza luminii în vid,  $c$ . Dar în realitate, viteza de propagare în ghidurile de undă este inferioară vitezei undelor electromagnetice în vid. Putem distinge două viteze de propagare într-un ghid de undă: *viteza de fază*,  $v_f$ , adică viteza cu care se deplasează configurația de câmpuri din fig.4.38 și *viteza de grup*,  $v_g$ , adică viteza cu care se transmite energia unei de-a lungul ghidului de undă. Viteza de grup este măsurabilă experimental, căci putem cronometra timpul necesar ca informația (energia) să ajungă de la sursă până într-un punct dat. Expresiile matematice ale celor două viteze caracteristice ghidului de undă sunt următoarele:

- viteza de fază
- 

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \quad (.4.104)$$

- viteza de grup

$$v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \quad (4.105)$$

unde  $a$  este lărgimea ghidului de undă, iar  $\lambda$  este *lungimea de undă a undeii în spațiul liber*. În spațiul liber, unde lărgimea ghidului de undă tinde la infinit, se obține egalitatea celor două viteze,  $a \rightarrow \infty$ ,  $v_g = v_f$ .

O caracteristică importantă este faptul că viteza de fază este superioară vitezei luminii din vid,  $c$ . Conform teoriei relativității nici un corp, semnal sau transport de energie nu se poate propaga cu viteze mai mari ca viteza luminii din vid. Energia (sau informația) undeii electromagnetice se transmite prin ghidul de undă cu viteza de grup,  $v_g$ , care este inferioară vitezei  $c$ .

Lungimea de undă a undeii în spațiul liber este dată de relația  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ . Pentru o frecvență dată,  $\nu$ , lungimea de undă a undeii în ghidul de undă,  $\lambda_g$ , diferă de lungimea de undă din spațiul liber, fiind dată de relația:

$$\lambda_g = \frac{v_f}{\nu} = \frac{v_f}{\frac{c}{\lambda}} = \lambda \frac{v_f}{c} \quad (4.106)$$

Astfel lungimea de undă a undeii în ghidul de undă este mai mare decât lungimea de undă din spațiul liber,  $\lambda_g > \lambda$ . *Fibrele optice* sunt un nou tip de ghiduri de undă în care undele electromagnetice se transmit prin reflexii totale pe pereții interiori ai fibrelor. Fibrele optice se mai numesc și *ghiduri optice*.

#### IV. Polarizarea luminii

Am văzut în capitolul 3 că undele transversale în general, deci și undele electromagnetice, sunt nepolarizate atunci când sunt emise în mod natural. Fenomenul de polarizare poate fi observat numai în cazul undelor transversale, pe când interferența și difracția undelor se pot produce în cazul tuturor tipurilor de unde elastice, nu numai la undele transversale.

Lumina este o undă electromagnetică transversală, fiind emisă în mod natural de moleculele din sursele de lumină, ca o undă nepolarizată. Pentru a simplifica expunerea, putem reprezenta numai vectorul intensitate a câmpului electric,  $\vec{E}$ , din unda electromagnetică, așa cum se vede în fig. 4.39.a).

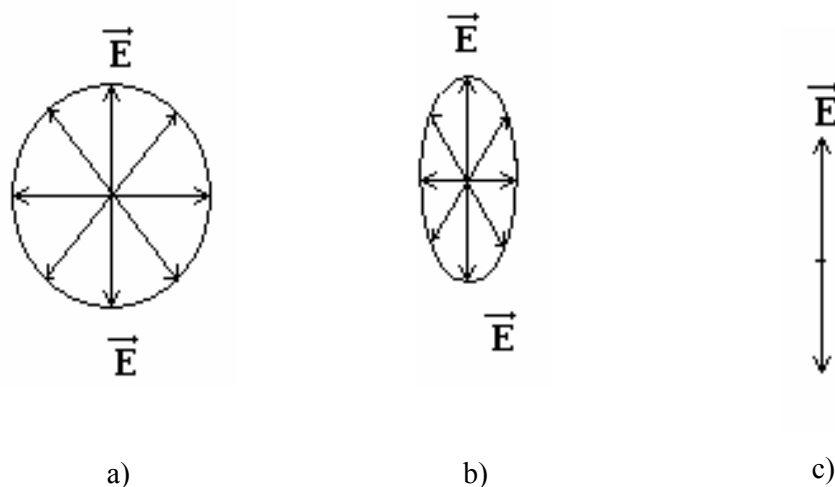


Fig. 4.39. Undă electromagnetică cu diverse grade de polarizare: a) nepolarizată; b) parțial polarizată; c) liniar polarizată.

Fiecare moleculă în parte poate emite o undă transversală liniar polarizată, dar cum sursa de lumină este formată dintr-un număr foarte de mare de molecule, fiecare act de emisie poate fi orientat întâmplător. Unda electromagnetică emisă de sursă este un amestec aleator de unde electromagnetice transversale, emise de fiecare moleculă, deci este o undă transversală, dar nepolarizată.

În fig. 4.39.b) se poate vedea efectul unei polarizări parțiale a unei transversale, ceea ce înseamnă că se selectează o direcție privilegiată pentru vibrația vectorului de câmp care are intensitatea maximă, în timp ce, pe alte pe direcții, intensitatea câmpului electric al undei este mult mai redusă. O undă liniar polarizată este o undă în care există numai o direcție de vibrație pentru vectorul câmp electric (vezi fig. 4.39.c), respectiv numai o direcție de vibrație pentru vectorul câmp magnetic, aceasta din urmă fiind perpendiculară pe direcția câmpului electric.

Dispozitivele prin intermediul cărora se pot obține unde parțial sau liniar polarizate se numesc *polarizori*. Polarizorii sunt formați din lanțuri moleculare polimerizate de alcool de polivinil, care au fost aliniat pe o direcție privilegiată și apoi au fost laminate pe o foaie transparentă (suport de acetat de butirat de celuloză). Atunci când lumina cade pe polarizor, se transmite numai o componentă polarizată a acesteia, așa cum se poate vedea în fig. 4.40.

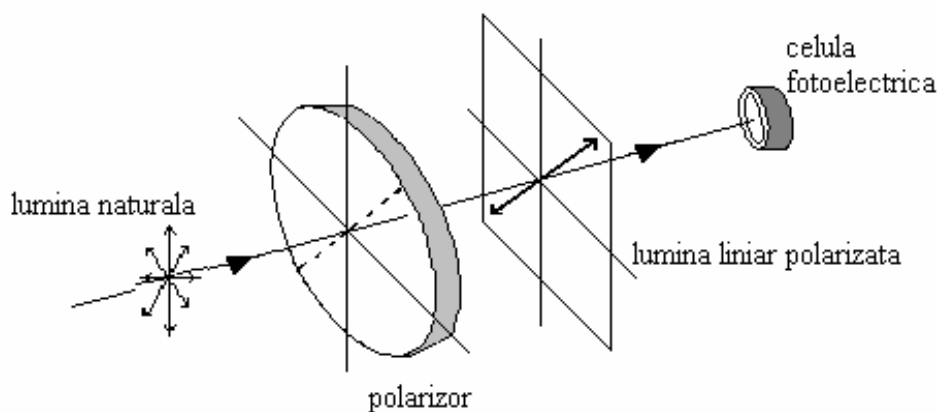


Fig. 4.40. Polarizarea luminii transmise prin polarizor.

Orice mărime vectorială poate fi descompusă pe anumite direcții, obținându-se componentele sale pe acele direcții. Vectorul intensitate a câmpului electric poate fi descompus, în planul polarizorului, în două componente perpendiculare între ele, din care trece mai departe numai componenta care corespunde direcției privilegiate de către polarizor.

Un caz special de polarizare a luminii este cel care se întâlnește în cazul *împrăștierii* (sau *difuziei*) luminii. Din cauza difuziei luminii pe moleculele din atmosferă, vedem cerul senin (de culoare albastră) și soarele ca fiind de culoare roșie la apus. În fig. 4.41 se poate vedea fenomenul de împrăștiere a luminii pe o moleculă din atmosferă. Astfel, observăm că unda luminosă se decompune în două unde, una împrăștiată de moleculă sub un unghi de  $90^\circ$ , iar cea de-a doua transmisă nedeviată. Componenta difuzată este de culoare albastră și este liniar polarizată într-un plan perpendicular pe direcția de propagare a undei. Componenta transmisă este parțial polarizată și are culoarea roșie. Culoarea diferită a celor două unde se datorează faptului că moleculele din atmosferă au tendința de a împrăști mai mult componentele din domeniul de lungimi de undă scurt, adică cele care dau pentru ochiul uman senzația luminoasă de albastru. Componentele cu lungimi de undă mai mari sunt lăsate să treacă nedeivate, de unde și culoarea roșie a ansamblului lor.

Dacă Pământul nu ar avea atmosferă, culoarea cerului ar apărea neagră tot timpul, așa cum o văd astronauții aflați în nave cosmice sau pe Lună.

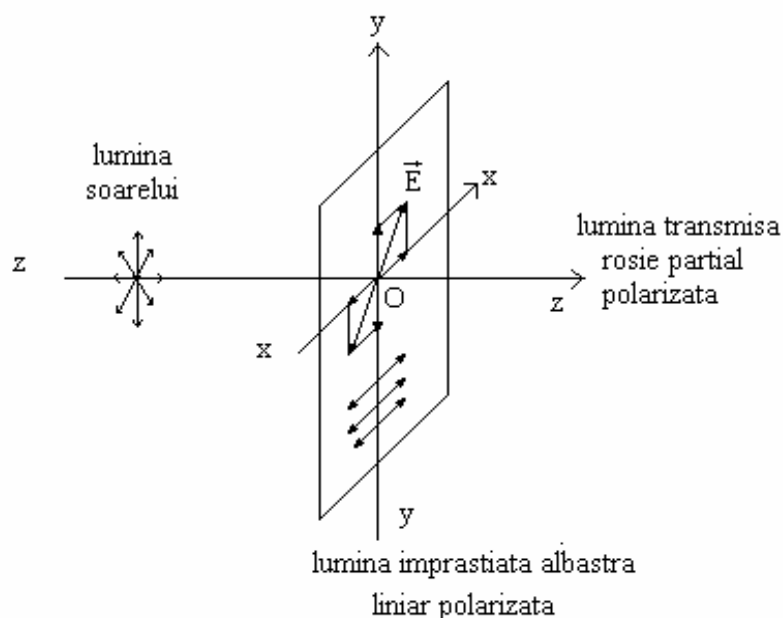


Fig. 4.41. Difuzia luminii soarelui pe o moleculă din atmosferă.

Lumina liniar polarizată reprezintă un anumit tip de unde polarizate. Există și sisteme optice, așa cum sunt cristalele birefringente de exemplu, care separă lumina naturală incidentă pe ele în două unde ce se propagă pe direcții paralele. Una dintre cele două unde se numește *raza ordinară*, ce se propagă pe direcția unde incidente, iar cealaltă se numește *raza extraordinară*, deoarece se propagă pe o direcție paralelă cu raza ordinară, dar deplasată față de direcția ei. Ambele unde sunt polarizate liniar, dar direcțiile de vibrație ale vectorilor de câmp formează un unghi drept. Acest efect se datorează existenței a doi indici de refracție ai cristalului, indicele de refracție corespunzător razei extraordinare fiind dependent de direcție. După cum știm valoarea indicelui de refracție determină viteza de propagare a unde. Deci cele două unde liniar polarizate pe direcții perpendiculare s-au propagat prin cristal cu viteze diferite.

Dacă se taie cristalul birefringent în așa fel încât unda incidentă să fie perpendiculară pe axa optică a cristalului, atunci cele două unde nu se mai separă, ele propagându-se pe aceeași traiectorie cu viteze diferite. La ieșirea din cristal cele două unde sunt defazate și produc lumină polarizată eliptic, liniar sau circular. În fapt, avem de-a face cu compunerea a două mișcări oscilatorii liniare care se adună, așa cum am văzut în subparagraful 3.3.3. Astfel, știm că, în funcție de defazajul pe care-l au la ieșire, cele două unde transmise prin cristalul birefringent pot genera o undă circulară.

## 5. Bazele fizice ale mecanicii cuantice

### 5.1. Efectul fotoelectric

Pentru prima dată în anul 1887 Hertz a observat experimental că, dacă se iluminează plăcuțe realizate din metale, cum ar fi zincul, acestea emit electroni. El descoperise *efectul fotoelectric*. Efectul fotoelectric este fenomenul de emisie de electroni din metale sub acțiunea luminii.

În anul 1888 Stoletov și Edison au utilizat montajul experimental din fig. 5.1 pentru a studia efectul fotoelectric. Montajul este format dintr-o celulă fotoelectrică (un catod metallic și un anod sub forma unei grile metalice, închise într-un tub vidat), un ampermetru, o sursă de curent electric continuu cu polaritatea pozitivă spre anod și o sursă de lumină monocromatică.

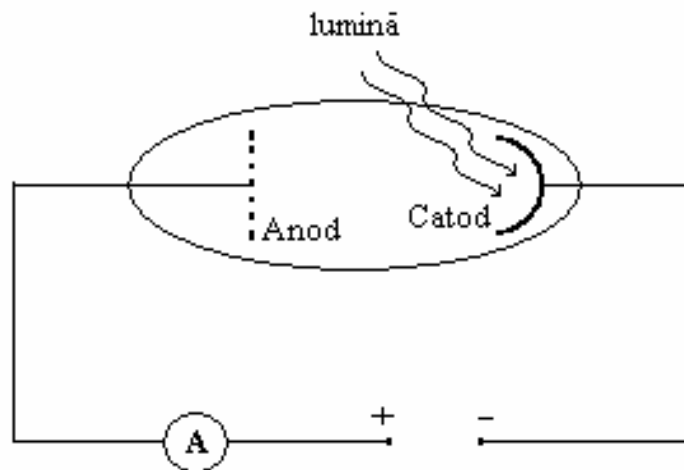


Fig. 5.1. Montaj cu fotocelulă.

Sub influența luminii, din metalul catodului se emit electroni (numiți *fotoelectroni*) care se îndreaptă spre anod, acesta fiind electricizat pozitiv. Astfel, deși în tub este vid, prin intermediul fotoelectronilor eliberați din catod se închide circuitul electric din figură, iar ampermetrul indică intensitatea curentului fotoelectric.

Se constată că prin variația tensiunii electrice din circuit, *curentul fotoelectric* are o variație specifică (vezi fig.5.2). La un flux luminos constant, pe măsură ce tensiunea electrică crește, intensitatea fotocurentului crește până la o valoare de saturație,  $I_{\text{sat}}$ . În continuare, oricât de mult s-ar mări tensiunea electrică, intensitatea fotocurentului nu va mai crește. Graficul din fig. 5.2 se numește *caracteristica I-U a fotocelulei*. Observăm că există un curent fotoelectric,  $I_0$ , chiar în absența tensiunii electrice din

circuit. Acest curent electric se datorează fotoelectronilor care, după ce sunt eliberați din catod, au o energie cinetică suficient de mare încât să atingă anodul.

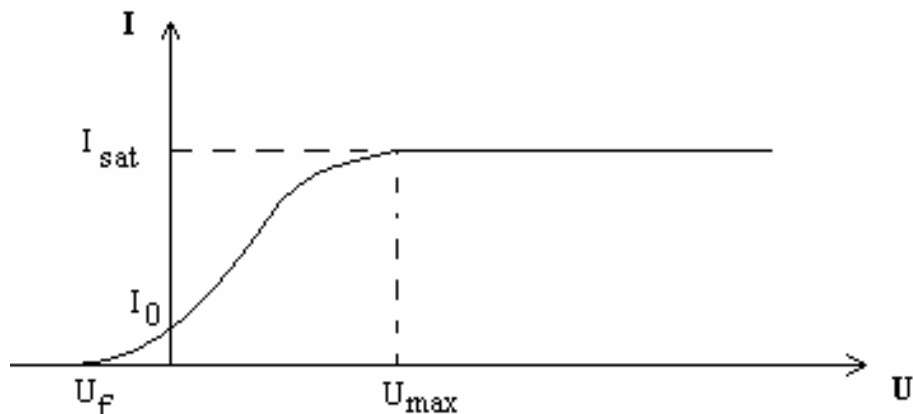


Fig. 5.2. Caracteristica I-U a fotocelulei.

Dacă la ieșire din catod fotoelectronii au direcția îndreptată spre anod, ei îl vor atinge chiar fără polarizarea anodului. De remarcat că, pentru a anula curentul fotoelectric, trebuie aplicată o tensiune electrică inversă (negativă) pe anod,  $U_f$ . La aplicarea acestei tensiuni, toți fotoelectronii, chiar și cei mai rapizi, sunt frânați. Conform legii dinamicii, variația energiei cinetice a fotoelectronilor este egală cu lucrul mecanic efectuat de câmpul electrostatic corespunzător tensiunii inverse  $U_f$ :

$$\frac{1}{2} m v^2 = e U_f \quad (5.1)$$

Se constată experimental că, dacă se aplică fluxuri luminoase mai mari, se obțin caracteristici I-U ale fotocelulei având curenții de saturație tot mai mari, așa cum se poate vedea în fig.5.3.

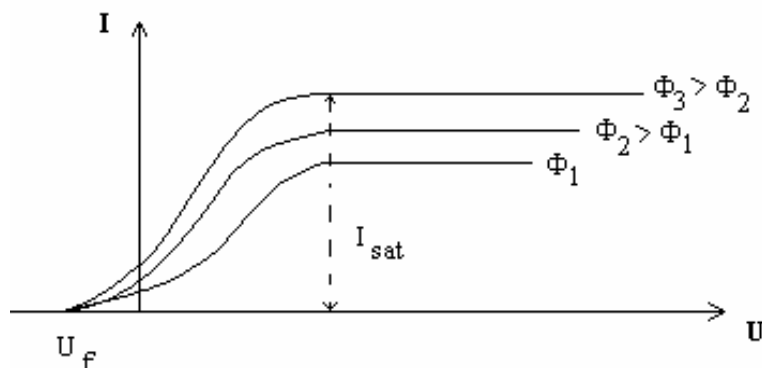


Fig.5.3. Efectul fluxului luminos asupra caracteristicii I-U a fotocelulei.

Astfel, una din legile efectului fotoelectric este proporționalitatea dintre intensitatea curentului de saturație și fluxul luminos incident:

$$I_{\text{sat}} = \gamma \Phi \quad (5.2)$$

unde  $\gamma$  este o constantă de proporționalitate.

Dacă se măsoară energia cinetică a fotoelectronilor, prin determinarea tensiunii de frânare,  $U_f$ , pentru diferite frecvențe ale luminii incidente, se constată că:

- pentru fiecare metal există o frecvență a luminii,  $\nu_0$  (numită *frecvență de prag*), sub care efectul fotoelectric nu se produce;
- energia cinetică a fotoelectronilor crește cu creșterea frecvenței luminii, pentru orice valoare mai mare decât frecvența de prag,  $\nu > \nu_0$ ;
- efectul fotoelectric este instantaneu.

Nici una din constatările experimentale privitoare la efectul fotoelectric nu poate fi explicată cu teoria undelor electromagnetice. La începutul secolului XX, în anul 1905, Planck a formulat o teorie privind emisia radiației termice sub formă de *cuante de energie*. Conform acestei teorii, purtătorii cuantelor de energie sunt niște corpusculi microscopici, numiți *fotoni*. Energia unui foton este proporțională cu frecvența undei electromagnetice respective:

$$\varepsilon = h \nu \quad (5.3)$$

unde  $h$  este constanta lui Planck, care are valoarea  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  J s.

Preluând teoria cuantelor, Einstein propune o explicație a efectului fotoelectric bazată pe fotoni. Astfel, el presupune că și într-un fascicol luminos energia este transportată prin spațiu sub formă de porții finite, numite cuante de energie, de către fotoni. Fiecare foton din fasciculul incident pe catodul fotocelulei ciocnește un electron căruia îi cedează energia sa. Electronul care a primit energia fotonului poate fi eliberat din metal, dacă energia fotonului este mai mare decât lucrul de extracție a electronilor din metal,  $L_{\text{ext}}$ . Restul de energie a fotonului devine energia cinetică a fotoelectronului emis. Astfel, Einstein a scris *legea efectului fotoelectric* sub forma:

$$h \nu = L_{\text{ext}} + \frac{1}{2} m v^2 \quad (5.4)$$

Lucrul mecanic de extracție a electronilor este relativ mic la metale, de aceea producerea efectului fotoelectric este posibilă la energii nu prea mari ale fotonilor incidenti. Relația (5.4) explică din punct de vedere teoretic toate legile deduse pe cale experimentală pentru efectul fotoelectric.



Să presupunem că frecvența fascicolului incident este,  $\nu_0$ , astfel încât energia fotonului egalează lucrul mecanic de extracție a electronului din metal:

$$h \nu_0 = L_{\text{ext}} \quad (5.5)$$

În acest caz,  $\nu_0$  este frecvența de prag. Electronul este eliberat din metal, dar nu mai are energie cinetică. Dacă lumina are o frecvență mai mică decât  $\nu_0$ , atunci energia fotonului incident este mai mică decât lucrul mecanic de extracție, deci efectul fotoelectric nu se mai produce. De aceea, putem spune că fiecare metal are o frecvență de prag proprie, căci lucrul mecanic de extracție a electronilor este specific fiecărui material.

$$\nu_0 = \frac{L_{\text{ext}}}{h} \quad (5.6)$$

Frecvența de prag este frecvența minimă la care se mai poate produce efectul fotoelectric. Dacă frecvența luminii are o valoare mai mare decât frecvența de prag,  $\nu > \nu_0$ , atunci nu numai că se produce efectul fotoelectric, dar fotoelectronii au și energie cinetică la ieșirea din metal:

$$\frac{1}{2} m v^2 = h \nu - L_{\text{ext}} \quad (5.7)$$

Așa se explică una din legile efectului fotoelectric, și anume că energia cinetică a fotoelectronilor este proporțională cu frecvența luminii. În fig. 5.4. este reprezentată energia cinetică a fotoelectronilor în funcție de frecvența luminii.

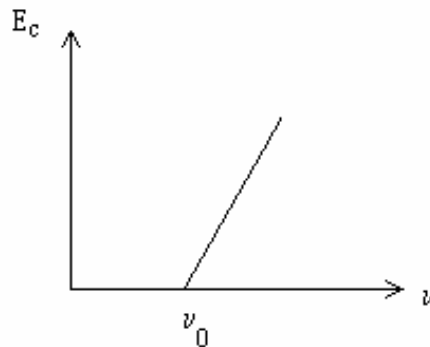


Fig. 5.4. Energia cinetică a fotoelectronilor în funcție de frecvența luminii.

Fluxul luminos este determinat de numărul de fotoni incidenti pe suprafața catodului în unitatea de timp. Procesul de absorbție al fotonilor este independent, de aceea un flux incident mai mare determină emisia unui număr mai mare de electroni în unitatea de timp. Cu alte cuvinte, intensitatea

fotocurentului este proporțională cu fluxul luminos incident pe catod, deci și intensitatea curentului de saturație este proporțională cu fluxul luminos, conform cu relația (5.2).

*Importanța teoretică a teoriei lui Einstein.* Așa cum am spus mai înainte, Planck introdusese numai teoria emisieii energiei electromagnetice prin porții discrete de energie (cuante de energie). Dar Einstein are meritul de a fi extins teoria cuantelor și pentru propagarea energiei electromagnetice în spațiu. El a afirmat pentru prima dată că un foton este o porție finită de energie și că fascicolul luminos este format dintr-o mulțime de fotoni ce transportă energia electromagnetică prin spațiu.

*Caracteristicile fotonului.* Fotonul este un corpuscul neutru din punct de vedere electric. Are viteza egală cu viteza undei electromagnetice, adică în vid se propagă cu viteza  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s. Fotonul este purtătorul unei energii, numită cantă de energie, dată de relația (5.3).

Conform teoriei relativității a lui Einstein, un corp care are masa  $m$ , are totodată energia:

$$\varepsilon = m c^2 \quad (5.8)$$

Egalând relațiile (5.3) și (5.8), obținem masa de mișcare a fotonului:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= m c^2 = h \nu \\ m &= \frac{h \nu}{c^2} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Această ultimă relație reprezintă modul în care se determină masa de mișcare a fotonului.

În teoria relativității a lui Einstein se demonstrează că un corp are și masă de repaos,  $m_0$ . Relația dintre masa de mișcare și masa de repaos depinde de viteză și, conform teoriei relativității a lui Einstein, este de forma:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.10)$$

unde  $v$  este viteza relativistă a corpului, adică o viteză foarte mare, comparabilă cu viteza luminii,  $c$ .

Fotonul are viteza luminii,  $v = c$ , deci masa lui de repaos este nulă:

$$m_0 = m \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}} = 0 \quad (5.11)$$

Aceasta înseamnă că nu există foton în repaos, deoarece el nu are masă în această stare.

Orice particulă care are masă și viteză, are și impuls mecanic. Fotonul are impulsul mecanic:

$$p = m c = \frac{h \nu}{c^2} c = \frac{h \nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (5.11)$$

unde am folosit relația dintre frecvența și lungimea de undă a unei electromagnetice,

$$\lambda = c T = \frac{c}{\nu}.$$

Teoria cuantelor nu a fost primită cu prea mare entuziasm de lumea științifică din epocă. Au fost necesare noi confirmări experimentale ale acestei teorii, deși sunt și astăzi oameni de știință și filozofi care nu o acceptă.

## 5.2. Efectul Compton

În anul 1921 fizicianul Compton a confirmat pe deplin teoria cuantelor de lumină prin observarea fenomenului de difuzie a fotonilor din razele X pe electroni. În anul 1927 el a primit premiul Nobel în Fizică pentru descoperirea efectului cuantic care îi poartă numele. El a determinat mișcarea unui foton înainte și după ciocnirea lui cu un electron, arătând că fotonul are impuls și energie.

Dispozitivul experimental utilizat de Compton, a cărui schemă este prezentată în fig. 5.5, constă dintr-o sursă de raze X care emite radiație spre un bloc de grafit. Se obține o radiație difuzată sub un anumit unghi,  $\theta$ , ce este captată de un detector. Razele incidente au lungimea de undă  $\lambda$ .

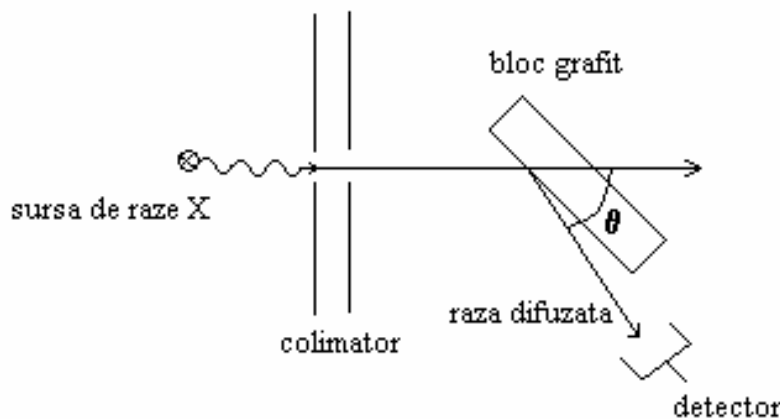


Fig. 5.5. Dispozitivul experimental al lui Compton.

Se constată că razele difuzate au o lungime de undă mai mare decât lungimea de undă a razelor incidente,  $\lambda' > \lambda$ . Diferența  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$  se numește *deplasare Compton*. Se constată experimental că

valoarea deplasării Compton depinde numai de unghiul de difuzie  $\theta$ . Compton a demonstrat că relația matematică ce exprimă dependența deplasării Compton de unghiul de difuzie este următoarea:

$$\Delta\lambda = 0.024(1 - \cos\theta) \text{ (Å)} \quad (5.12)$$

unde 1 Å reprezintă submultiplul metrului,  $1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$ .

Explicația fizică a fenomenului observat este următoarea: Electronii din blocul de grafit pot fi considerați aproape liberi, iar viteza lor este neglijabilă în raport cu viteza fotonilor. Electronii primesc energie de la fotonii incidenți pe blocul de grafit. Are loc o ciocnire elastică între un electron și un foton.

Spre deosebire de efectul fotoelectric, unde întreaga energie a fotonului era absorbită de electron, în efectul Compton electronul absoarbe numai o parte din energia fotonului.

Legea conservării energiei în ciocnirea elastică foton-electron se poate scrie sub forma:

$$h\nu = h\nu' + E_{\text{cin } e^-} \quad (5.13)$$

unde  $E_{\text{cin } e^-}$  reprezintă energia cinetică primită de electron.

Legea conservării impulsului mecanic în ciocnirea foton-electron se scrie sub forma:

$$\vec{p}_f = \vec{p}_f' + \vec{p}_e \quad (5.14)$$

unde  $\vec{p}_f$ ,  $\vec{p}_f'$  și  $\vec{p}_e$  sunt impulsurile mecanice ale fotonului incident, fotonului difuzat și, respectiv, al electronului. În fig.5.6 se vede că, în urma ciocnirii cu electronul aflat în repaus, fotonul este difuzat pe electron.

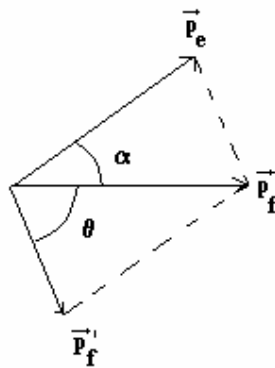


Fig.5.6. Ciocnirea elastică foton-electron.

Din legea conservării energiei și legea conservării impulsului mecanic se poate deduce valoarea frecvenței fotonului împrăștiat pe electron:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\theta) \quad (5.15)$$

unde  $m_0$  este masa de repaus a electronului. Valoarea constantei din relația (5.15) este  $\Lambda = \frac{h}{m_0 c} = 0.024$

Å și reprezintă deplasarea Compton corespunzătoare unui unghi de difuzie  $\theta = 90^\circ$ .

Se constată că se poate explica dependența deplasării Compton numai de unghiul de împrăștiere a razelor X, dacă de presupune că razele X sunt formate din fotoni, particule cu masă, energie și impuls mecanic. Aceste particule se comportă ca niște "bile de biliard" în procesele de ciocnire elastică cu electronii.

### 5.3. Radiația termică

Un corp aflat la o anumită temperatură emite radiație electromagnetică în exterior. Cu cât temperatura lui este mai ridicată, cu atât emisia sa se îmbogățește cu radiații din domeniul de lungimi de undă scurte. Radiația electromagnetică emisă de un corp incandescent are lungimi de undă din domeniul ultraviolet. Dacă nu este incandescent, corpul emite totuși radiație de lungimi de undă lungi, adică din domeniul infraroșu. De aceea, radiația termică este specifică tuturor corpurilor.

Să presupunem că mai multe corpuri, având temperaturi diferite, se introduc într-o incintă căptușită, impermeabilă și cu suprafața internă reflectantă. Corpurile vor schimba energie între ele prin radiație termică până când ajung la aceeași temperatură. Aceste corpuri sunt în *echilibru termic*. La echilibru termic energia primită în unitatea de timp de fiecare dintre corpuri este egală cu energia radiată în unitatea de timp. Se obține o radiație termică la o anumită temperatură, numită o *radiație termică de echilibru*.

*Corpul negru.* Un corp care absoarbe întreaga energie a radiației care cade pe el se numește corp negru. Corpuri absolut negre nu există în natură, dar să considerăm o cavitate care are un mic orificiu (vezi fig. 5.7). O radiație incidentă pe orificiu se reflectă în interiorul cavității de un număr mare de ori. O fracțiune din energia radiației este absorbită de peretele interior al cavității la fiecare reflexie a radiației. De aceea, fracțiunea din energia radiației care iese prin orificiu este foarte redusă. Putem spune că absorbția radiației de către orificiu este practic totală. *Suprafața orificiului* se comportă ca un corp negru. Radiația lui se numește *radiația corpului negru*. Un corp real absoarbe doar o fracțiune din radiația incidentă pe el, adică se comportă ca un corp gri.

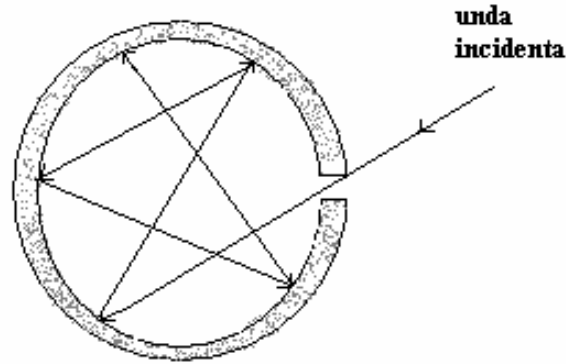


Fig. 5.7. Cavitate absorbantă de radiație care se comportă ca un corp negru.

Orice suprafață care poate să absoarbă toată radiația electromagnetică incidentă pe ea, se va vedea ca o suprafață neagră, cu condiția ca temperatura ei să fie suficient de redusă încât să nu fie ea însăși luminoasă. Această suprafață se numește *suprafață neagră ideală*. Nici o suprafață reală nu este absolut neagră. De aceea, se introduce o mărime care să exprime gradul de înnegrire al suprafețelor reale, numită emisivitate,  $\epsilon$ . Emisivitatea unei suprafețe negre ideale este egală cu unitatea. Suprafețele reale au emisivități subunitare. În general, emisivitatea este o proprietate complexă a suprafețelor, ea depinzând de gradul de polizare, de temperatură, de proprietățile materialului polizat, etc.

### 5.3.1. Mărimi radiante

1) *Fluxul radiant*. Raportul dintre energia radiată și intervalul de timp al acestei emisii de energie se numește flux radiant:

$$\Phi = \frac{dW}{dt} \quad (5.16)$$

Din definiție rezultă că fluxul radiant are semnificația unei puteri. Unitatea de măsură pentru fluxul radiant este  $1W=1J/s$ . În caz general, radiația nu este monocromatică, adică nu conține unde de o singură

lungime de undă. De aceea, se definește un *flux spectral radiant*. El reprezintă fluxul radiant corespunzător unei lungimi de undă  $\lambda$ , aflată într-un interval spectral infinitezimal  $\lambda \in [\lambda, \lambda + d\lambda]$ :

$$\Phi_\lambda = \frac{d\Phi}{d\lambda} \quad (5.17)$$

În continuare vom utiliza notațiile cu indice  $\lambda$  pentru mărimi spectrale, adică pentru mărimi fizice exprimate într-un interval spectral infinitezimal. Mărimile integrale se obțin din integrarea mărimilor spectrale corespunzătoare, pe tot spectrul de lungimi de undă:

$$\Phi = \int_0^\infty \Phi_\lambda d\lambda \quad (5.18)$$

2) *Densitatea specifică spectrală a energiei radiației*. Densitatea volumică de energie a radiației electromagnetice este dată de relația:

$$w = \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \mu H^2) \quad (5.19)$$

Densitatea specifică spectrală a energiei radiației electromagnetice,  $\rho_\lambda$ , este densitatea volumică de energie a radiației electromagnetice corespunzătoare unei lungimi de undă  $\lambda$ , aflată într-un interval spectral infinitezimal  $\lambda \in [\lambda, \lambda + d\lambda]$ :

$$\rho_\lambda = \frac{dw}{d\lambda} \quad (5.20)$$

Dacă integrăm densitatea specifică spectrală a energiei radiației electromagnetice pe tot spectrul de lungimi de undă, obținem densitatea volumică de energie a radiației electromagnetice:

$$w = \int_0^\infty \rho_\lambda d\lambda \quad (5.21)$$

3) *Radianța*. Radianța unei suprafețe a sursei de radiație electromagnetică într-un punct al său reprezintă fluxul radiant emis de acea unitate de suprafață, în toate direcțiile:

$$R = \frac{d\Phi}{dS} \quad (5.22)$$

Radianța se exprimă în  $1 \text{ W/m}^2$ . Se constată că radianța depinde de lungimea de undă și de temperatura absolută a corpului radiant, așa că se definește *radianța spectrală*:

$$r_\lambda = \frac{dR}{d\lambda} \quad (5.23)$$

Prin integrarea relației (5.23) pe tot spectrul de lungimi de undă se obține radianța integrală,  $R$ .

### 5.3.2. Legile radiației termice

#### I. Legea Stefan-Boltzmann

Se constată experimental că radianța corpului absolut negru depinde numai de temperatura lui absolută, conform legii deduse de Stefan și Boltzmann:

$$R_T = \int_0^{\infty} r_{\lambda} d\lambda = \sigma T^4 \quad (5.24)$$

unde  $\sigma$  este o constantă universală, numită constanta Stefan-Boltzmann și are valoarea  $\sigma = 5.6 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ .

Pentru corpuri ale căror suprafețe nu sunt negre, se introduce o mărime adimensională, numită *emisivitate*,  $\varepsilon$ . Emisivitatea este un număr subunitar ce caracterizează suprafața corpului radiant. Atunci, radianța corpului a cărei suprafață nu este neagră devine:

$$R_T = \varepsilon \sigma T^4 \quad (5.25)$$

#### II. Legea lui Wien

Dacă se studiază dependența radianței spectrale de lungimea de undă și de temperatură, se constată că:

- La o temperatură dată, radianța spectrală depinde de lungimea de undă, graficul funcției  $r_{\lambda} = f(\lambda)$  fiind o curbă cu un singur maxim, ce corespunde unei anumite lungimi de undă, așa cum se vede în fig. 5.8.

- Cu cât temperatura este mai ridicată, cu atât poziția maximului curbei  $r_{\lambda} = f(\lambda)$  se deplasează către lungimi de undă mai scurte.

Dacă se măsoară radianța specifică spectrală la temperaturile  $T_1, T_2, T_3$ , din ce în ce mai ridicate, se obțin curbe asemănătoare cu cele din fig. 5.8. Lungimile de undă corespunzătoare maximelor curbelor de radianță sunt, în funcție de temperatură, în relația:

$$T_3 > T_2 > T_1 \Rightarrow \lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1$$

Se spune că maximele "se deplasează spre violet" odată cu creșterea temperaturii.

Wien a formulat legea matematică a "deplasării către roșu" a corpurilor în răcire, care se scrie sub forma:

$$\lambda_{\max} = \frac{c}{T} \quad (5.26)$$



unde  $T$  este temperatura absolută a corpului radiant, iar  $\lambda_{\max}$  este lungimea de undă a maximumului radianței sale. Constanta  $c$  are valoarea  $c = 2.8 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$ . Legea lui Wien se verifică foarte bine la lungimi de undă scurte.

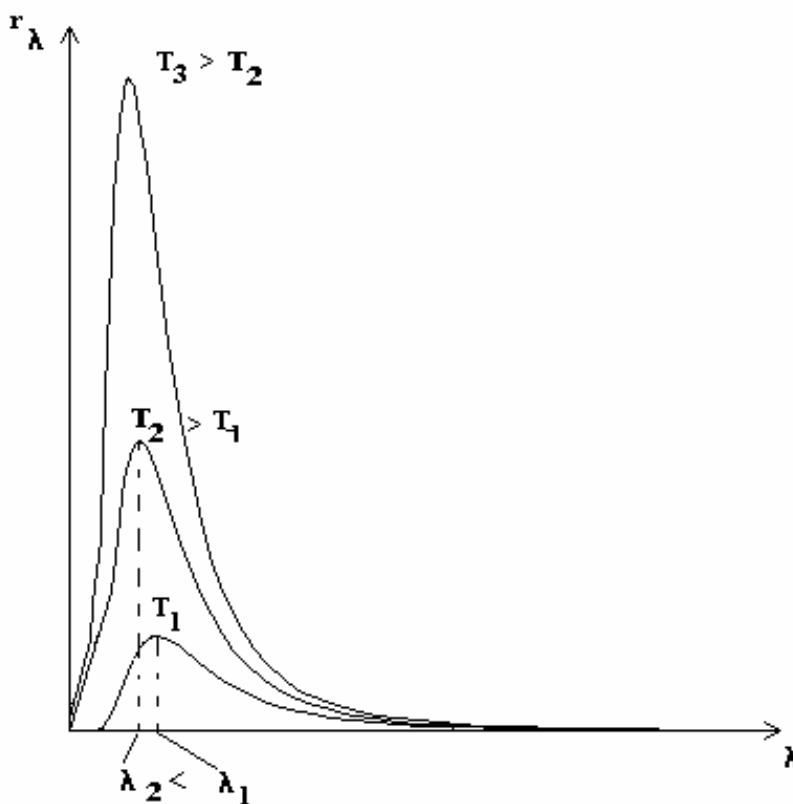


Fig. 5.8. Legea lui Wien.

### III. Legea lui Planck

În anul 1905 Max Planck emite ipoteza că emisia (ulterior s-a văzut că și absorbția) radiației electromagnetice se realizează în mod discret, discontinuu, prin cuante de energie:

- El a presupus că atomii se comportă ca niște oscilatori electromagnetici care emit radiație electromagnetică. Dar un oscilator cuantic nu poate avea orice energie, ci doar multipli întregi ai energiei unei cuante,  $h\nu$ .

- A doua ipoteză făcută de Planck a fost că emisia energiei electromagnetice nu se poate face în mod continuu, ci numai în mod discret, prin salturi, la emisia unei cuante. Când un oscilator trece dintr-o stare, de energie  $n h\nu$ , în alta, de energie mai mică,  $(n - 1)h\nu$ , el emite o cantă de energie  $h\nu$ . Adică, oscilatorul a emis un foton de energie  $h\nu$ . În felul acesta se produce radiația electromagnetică.

Planck deduce, pe baza celor două ipoteze, *legea radiației corpului negru*, sub forma matematică următoare:

$$r_{\lambda,T} = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1} \quad (5.27)$$

unde  $c_1$  și  $c_2$  sunt constante egale cu:

$$c_1 = 2\pi h c^2$$

$$c_2 = \frac{hc}{K_B}$$

unde  $K_B$  este constanta lui Boltzmann, iar  $c$  este viteza luminii în vid..

Legea lui Planck conține toate legile descoperite experimental, cum sunt:

a). Dacă se integrează relația (5.27) pe tot spectrul de lungimi de undă, se obține legea Stefan-Boltzmann:

$$R = \int_0^{\infty} r_{\lambda,T} d\lambda = \sigma T^4 \quad (5.28)$$

b) Dacă se pune condiția de maxim a funcției  $r_{\lambda,T}$ , se derivează  $r_{\lambda,T}$ , dată de relația (5.27) la lungimea de undă și se anulează derivata, se obține legea lui Wien:

$$\frac{dr_{\lambda,T}}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{c}{T} \quad (5.29)$$

Legile corpului negru se aplică în tehnica *pirometriei optice*. Pirometria are drept scop determinarea temperaturii corpurilor foarte calde sau chiar incandescente, pentru care metodele obișnuite de control al temperaturii nu se mai pot aplica. La temperaturi mai mari de 2200°C, cum sunt cele atinse în cuptoare uzinale, corpurile sunt incandescente, iar termocuplele sau termometrele nu se pot utiliza la temperaturi mai mari decât 1600°C. Cunoașterea proprietăților radiative ale corpului incandescent este crucială pentru acuratețea determinărilor de temperatură prin metode optice. Dacă el radiază ca un corp negru, atunci legile radiației termice permit determinarea temperaturii reale a corpului. Dacă acest corp nu poate fi aproximat cu un corp negru, atunci în legile radiației se introduce emisivitatea corpului. Problema acurateții determinării temperaturii corpului se reduce la corecta determinare experimentală a emisivității suprafeței sale. Majoritatea suprafețelor radiante prezintă emisivități dependente de temperatură, de gradul de prelucrare și de lungimea de undă. Dacă emisivitatea nu depinde de temperatură și de lungimea de undă, corpul radiant se numește *corp cenușiu*. Corpurile cenușii au emisivități constante.

Metode numerice moderne, care utilizează anumite *modele de radiație termică*, sunt utilizate în prezent pentru a determina temperatura unor incinte în care au loc procese tehnologice la temperatură foarte ridicată. Modelarea numerică a fenomenelor fizice, printre care se numără și transferul de căldură, este o metodă recomandată în cazul în care, de exemplu, temperatura este atât de mare încât măsurarea experimentală nu este eficientă. De exemplu, metodele de creștere a cristalelor de safir utilizează

cuptoare în care temperatura ajunge la  $2500^{\circ}\text{C}$ , deoarece temperatura de topire-solidificare a  $\text{Al}_2\text{O}_3$  este de  $2050^{\circ}\text{C}$ . Aceste instalații sunt prevăzute cu pirometre optice care permit controlul foarte exact al temperaturii din incinta de cristalizare.

#### 5.4. Experiența Franck-Hertz

În anul 1914 Franck și Hertz au dovedit experimental că stările energetice ale atomilor sunt stări discrete și că, la trecerea unui atom dintr-o stare energetică în alta, se emite sau se absoarbe o cantă de energie,  $h\nu$ . Dipozitivul experimental constă dintr-un tub catodic, în care sunt atomi de mercur, așa cum se vede în fig. 5.9.

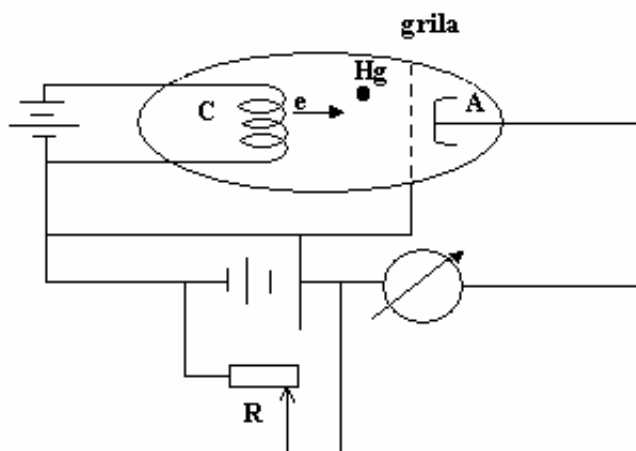


Fig. 5.9. Dipozitivul experienței Franck-Hertz.

Electronii emiși de filament (care este și catod, în același timp), sunt accelerați în tub sub o tensiune variabilă. Grila din vecinătatea anodului este negativată, astfel încât ea frânează electronii ce se îndreaptă spre anod, oprindu-i pe cei care nu au suficientă energie cinetică pentru a o străbate. Se măsoară intensitatea curentului electric de la anod, în funcție de tensiunea electrică aplicată pe tub. Caracteristica I-U a tubului este prezentată în fig. 5.10.

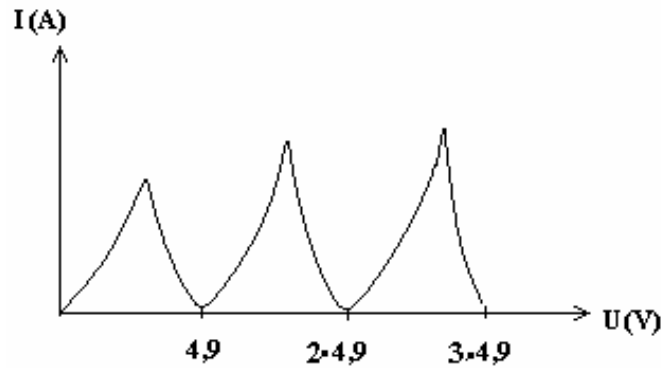


Fig. 5.10. Caracteristica I-U în experiența Franck-Hertz.

Se poate observa faptul că intensitatea curentului electric la anod scade periodic, odată cu creșterea tensiunii electrice. Prima scădere a intensității curentului electric se obține la tensiunea de  $U_1 = 4,9 \text{ V}$ , apoi se repetă și la tensiuni egale cu multipli de forma:

$$2 \cdot U_1 = 2 \cdot 4,9 \text{ V}, 3 \cdot U_1 = 3 \cdot 4,9 \text{ V}, \text{ ș. a.}$$

Fiecare scădere a intensității curentului electric reprezintă o scădere dramatică a numărului de electroni ce ajung la anodul tubului. Un electron accelerat la tensiunea  $U_1 = 4,9 \text{ V}$  are o energie cinetică  $E_{c1} = 4,9 \text{ eV}$  (1 eV reprezintă un submultiplu al unității de măsură a energiei,  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ). La această energie electronul se apropie de anod, dar există posibilitatea de a se ciocni cu unul din atomii de Hg aflați chiar în vecinătatea grilei. Dacă ciocnirea este elastică, atunci atomul de Hg primește toată energia electronului. Fără energie cinetică, electronul nu mai poate trece de grila negativată din fața anodului. Cu cât au loc mai multe ciocniri de acest tip în fața grilei, cu atât mai puțini electroni mai pot trece spre anod și curentul scade. Întrebarea care se pune este de ce aceste ciocniri nu pot avea loc oriunde în tub și la orice energie a electronilor? De ce trebuie ca electronul să aibă exact energia corespunzătoare unei tensiuni de 4,9 V? Explicația rezidă în structura atomilor de Hg. Atomii de mercur sunt sisteme cuantice, ale căror stări de energie sunt discrete. Un atom nu absoarbe și nu emite energia decât în cuante de energie. Cuaanta de energie necesară atomului de Hg, pentru a trece din starea fundamentală într-o stare energetică superioară, este  $\varepsilon = 4,9 \text{ eV}$ . De aceea atomul de mercur poate suferi o ciocnire elastică numai cu un electron care are energia cinetică egală cu cuaanta sa de energie,  $E_{c1} = \varepsilon = 4,9 \text{ eV}$ .

Ce se întâmplă la  $2 \cdot U_1 = 2 \cdot 4,9 \text{ V}$ ? Sub o tensiune de  $2 \cdot 4,9 \text{ V}$  electronul va fi accelerat astfel: (i) pe prima jumătate a distanței dintre catod și anod, el atinge o energie cinetică  $E_{c1} = 4,9 \text{ eV}$  și poate să o cedeze, prin ciocnire elastică, unui atom de Hg, aflat la jumătatea distanței catod-anod; (ii) pe a doua jumătate de drum, electronul este din nou accelerat, astfel încât atinge din nou, în vecinătatea anodului, energia cinetică  $E_{c1} = 4,9 \text{ eV}$ , pe care o poate ceda unui alt atom de Hg. Din nou curentul anodic scade, deoarece electronul respectiv nu mai trece de grilă.

Aceste explicații ale fenomenului observat experimental au dovedit încă o dată că atomii sunt sisteme cuantice, care au nivele discrete de energie. Trecerea atomului dintr-o stare energetică în alta se poate face numai prin absorbția sau emisia unei cuante de energie bine determinate, egală cu diferența dintre nivelele energetice între care se face saltul, așa cum se poate vedea în fig. 5.11.

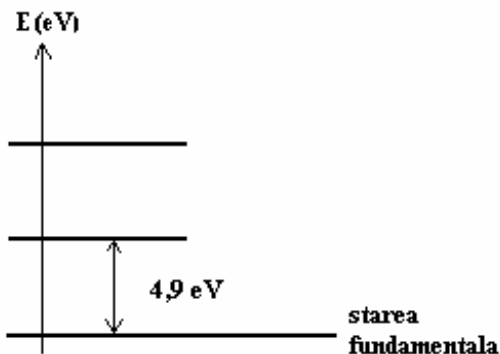


Fig. 5.11. Nivele energetice discrete în atomul de mercur.

Concluziile acestei experiențe au contribuit la înțelegerea mai profundă a conceptelor de bază ale teoriei cuantice, căci existența nivelurilor discrete de energie ale sistemelor microscopice, cum sunt atomii și nucleeele, a fost demonstrată printr-un experiment independent.

### 5.5. Relațiile de nedeterminare ale lui Heisenberg

În fizica clasică starea unui sistem de particule se poate determina prin ansamblul tuturor coordonatelor și impulsurilor corespunzătoare. Ar fi posibilă determinarea simultană a tuturor coordonatelor și impulsurilor particulelor. Microparticulele, studiate în cadrul mecanicii cuantice, manifestă unele proprietăți ondulatorii, în care starea lor poate fi descrisă cu ajutorul unor unde. Caracterul ondulatoriu al fotonului limitează comportamentul său ca particulă. Dacă o particulă poate fi localizată în spațiu într-un punct, nu același lucru se poate spune despre o undă. Să presupunem că electronii dintr-un fascicol paralel cad perpendicular pe un paravan în care este practică o fantă de lățime  $\Delta x$  (vezi fig. 5.12).

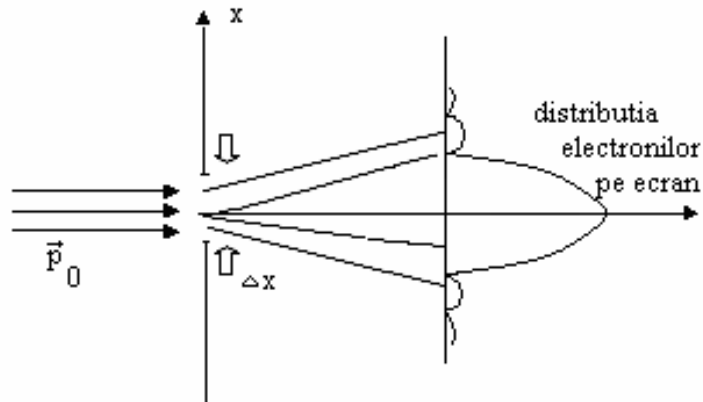


Fig.5.12. Fascicol de electroni difuzat pe o fantă.

După cum vedem în figură, electronii după ce trec dincolo de fantă nu mai formează un fascicol paralel, ci sunt difuzați în toate direcțiile. Electronii formează pe ecran o distribuție de forma celei din figură. Să presupunem că măsurăm impulsul electronilor înainte de fantă,  $\vec{p}_0$ . În concepția corpusculară se consideră că electronii interacționează cu marginile fantei și deviază de la direcția inițială. Această deviație este exprimată printr-un impuls suplimentar primit de un electron pe direcția x,  $\Delta p_x$ . Acest impuls se compune vectorial cu impulsul inițial și se obține un impuls total al electronului după trecerea prin fantă:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \Delta \vec{p}_x \quad (5.30)$$

Direcția acestui vector va indica locul de pe ecran unde va cădea electronul, așa cum se vede în fig. 5.13.

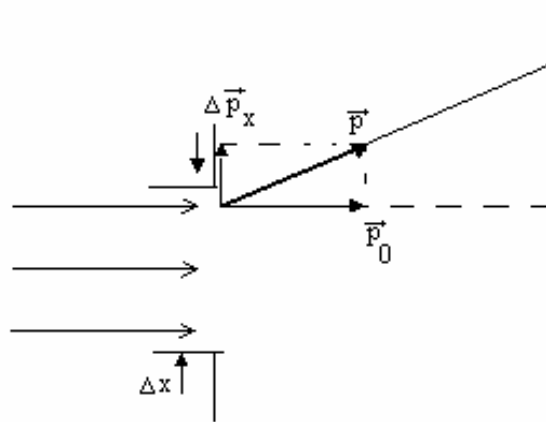


Fig. 5.13. Deviația electronului la trecerea prin fantă.

Datorită faptului că electronul poate intra pe oriunde prin fantă, putem aprecia că  $\Delta x$  este imprecizia la determinarea coordonatei verticale a particulei. Heisenberg a afirmat că nu se pot cunoaște simultan, oricât de precis, o anumită coordonată a particulei și componenta impulsului mecanic pe acea direcție. Între *imprecizia la determinarea componentei impulsului*,  $\Delta p_x$ , pe direcția Ox și *imprecizia asupra coordonatei corespunzătoare*,  $\Delta x$ , există o relație de forma:

$$\Delta p_x \Delta x > \hbar \quad (5.31.a)$$

unde  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  se numește constanta lui Planck redusă.

Același tip de relație de nedeterminare se poate exprima și asupra celorlalte două componente ale impulsului mecanic și ale coordonatelor corespunzătoare:

$$\Delta p_y \Delta y > \hbar \quad (5.31.b)$$

$$\Delta p_z \Delta z > \hbar \quad (5.31.c)$$

Relațiile (5.31.a), (5.31.b) și (5.31.c) se numesc *relațiile de nedeterminare ale lui Heisenberg*.

Conform relațiilor lui Heisenberg, nu se poate cunoaște simultan cu precizie suficient de bună coordonata și componenta corespunzătoare a impulsului mecanic ale unei microparticule. Produsul impreciziilor în determinarea simultană a celor două mărimi este mai mare decât  $10^{-34}$  J s. O precizie foarte bună la determinarea poziției ( $\Delta x \rightarrow 0$ ) determină o nesiguranță completă asupra componentei impulsului mecanic pe acea direcție ( $\Delta p_x \rightarrow \infty$ ).

În locul mărimilor fizice impuls mecanic și poziție se poate scrie și o relație de nedeterminare între energie și timp, de forma:

$$\Delta E \Delta t > \hbar \quad (5.32)$$

unde  $\Delta E$  reprezintă imprecizia la determinarea energiei particulei cuantice, iar  $\Delta t$  reprezintă intervalul de timp cât durează această stare energetică. Cu alte cuvinte cu cât durată stării energetice este mai scurtă, cu atât mai mare este nedeterminarea energiei stării. De exemplu, dacă are loc o tranziție spectrală de durată finită ( $t \approx 10^{-8}$  s), atunci rezultă o imprecizie la determinarea energiei, dată de relația (5.31), care face ca frecvența la care are loc tranziția să fie afectată de o imprecizie de ordinul:

$$\Delta \nu = \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{1}{\Delta t} \quad (5.33)$$

Există, de aceea, o lărgime naturală,  $\Delta \nu$ , a liniei spectrale.

Relațiile de nedeterminare ale lui Heisenberg nu se limitează numai la procesul cunoașterii, ci au aplicabilitate în toate aplicațiile tehnice ale fizicii microparticulelor.

De aceea studiul particulelor microscopice, numite și particule cuantice, necesită o abordare diferită față de cea specifică fizicii clasice, care se realizează în cadrul *mecanicii cuantice*.

## 5.6. Ipoteza lui Louis de Broglie

Așa cum am văzut în paragrafele anterioare, există fenomene fizice în care particulele se comportă ca unde armonice. În anumite cazuri, însăși lumina trebuie privită ca un ansamblu de fotoni (particule care au viteza luminii). Lumina comportă două manifestări distincte: (1) este o undă electromagnetică (așa cum o întâlnim în fenomene ca interferența, difracția, polarizarea, etc); (2) este un ansamblu de fotoni (care sunt particule întâlnite în efectul fotoelectric, efectul Compton, etc.). În accepția științifică modernă, undele electromagnetice au caracter dual, de undă și de corpuscul (*dualismul corpului-undă*). Acele fenomene fizice ce nu pot fi explicate în cadrul concepției clasice privind microparticulele au nevoie de legi fizice noi, adaptate acestui gen particular de fenomene ce se desfășoară în microcosmos.

În anul 1924 Louis de Broglie extinde concepția dualismului corpului-undă și asupra celorlalte microparticule aflate în mișcare. El presupune că fiecărui corp, de masă  $m$  și viteză  $v$ , i se asociază o undă a cărei lungime de undă este:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m v} \quad (5.34)$$

unde  $h$  este constanta lui Planck. Undele asociate particulelor cuantice se numesc *unde de Broglie*.

Să evaluăm lungimea de undă asociată unui electron accelerat sub o tensiune  $U$ . Electronul va avea viteza:

$$\frac{1}{2} m v^2 = eU \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

iar impulsul său va fi:

$$p = m v = \sqrt{2 m e U} \quad (5.35)$$

Lungimea de undă asociată este:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 m e U}} = \frac{12,25}{\sqrt{U}} \text{ \AA} \quad (5.36)$$

unde am folosit constantele  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C,  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Js.

Astfel, pentru tensiuni nu prea mari, lungimea de undă asociată electronului este de ordinul  $\lambda \cong 1 \text{ \AA} = 10^{-10}$  m.

De aceea electronii au proprietăți analoge undelor electromagnetice de lungimi de undă scurte (raze X). Astfel, la fel ca razele X, fasciculele de electroni pot fi difractate pe cristale. *Difracția electronilor pe cristale* a fost pusă în evidență de Davison și Germer în anul 1927. Ei au trimis fascicule de electroni accelerați la diferite tensiuni pe un cristal de nichel. Astfel, așa cum se poate vedea în fig. 5.14, electronii sunt reflectați de cristalul de nichel. Figura de difracție pe care o formează este perfect analogă cu figura de difracție obținută cu lumina pe o rețea de difracție. Pe un ecran situat pe direcția



electronilor reflectați se observă o figură formată din maxime și minime de difracție, deși nu s-a folosit o undă electromagnetică. Figura de difracție depinde de viteza electronilor și de unghiul de incidență al fascicolului pe cristal,  $\theta$ .

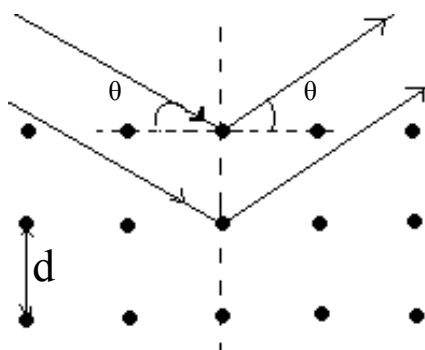


Fig. 5.14. Difracția electronilor pe un cristal de nichel.

Atomii cristalului de nichel formează o rețea cristalină ordonată, având constanta de rețea  $d$ . Electronii pot fi reflectați de primul plan atomic, sau de altul, situat în interiorul rețelei. Unghiurile sub care se obțin maxime de difracție verifică legea lui Bragg a difracției:

$$2 d \sin \theta = k \lambda \quad (5.37)$$

unde  $k$  este un număr întreg ce desemnează *ordinul maximului de difracție*, iar  $\lambda$  este lungimea de undă asociată electronilor. Se cunoaște constanta de rețea a cristalului de nichel,  $d = 2,15 \text{ \AA}$ . Experimentul a fost efectuat cu electroni accelerați sub o tensiune  $U = 54 \text{ V}$ . Se constată experimental că maximul de difracție ce corespunde unui unghi de incidență  $\theta = 50^\circ$  este al unei unde cu lungimea de undă  $\lambda_{\text{exp}} = 1,65 \text{ \AA}$ . Așadar, electronii, accelerați la o tensiune de  $54 \text{ V}$ , se comportă ca o undă electromagnetică cu lungimea de undă de  $1,65 \text{ \AA}$ .

Pe de altă parte, din relația (5.36) se poate determina lungimea de undă de Broglie, asociată electronilor, accelerați la o tensiune de  $54 \text{ V}$ . Se obține o lungime de undă de Broglie  $\lambda_{\text{teor}} = 1,65 \text{ \AA}$ . Astfel, observăm o excelentă concordanță între experiment și teorie.

Conform teoriei undelor, particulele cuantice vor avea și un vector de undă:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (5.38)$$

Între impulsul mecanic al particulei și vectorul de undă există următoarea relație:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k \quad (5.39)$$

Fizica cuantică se ocupă cu studiul microparticulelor ale căror mase și energii sunt foarte mici. O deosebită importanță în mecanica cuantică o are procesul de măsurare, care este o interacțiune a particulei

cuantice cu dispozitivul de măsură. În fizica clasică perturbația exercitată de instrumentul de măsură asupra particulei supuse măsurării ca și influența acestei măsurări asupra determinării simultane a altei mărimi fizice erau suficient de mici, încât să fie considerate neglijabile. În cadrul fizicii cuantice se aplică relațiile de nedeterminare ale lui Heisenberg, astfel încât perturbația pe care instrumentul de măsură o produce asupra particulei cuantice nu mai este neglijabilă. De exemplu, difracția electronilor printr-o fantă determină schimbarea impulsului lor, interacția lor cu marginile fantei adăugând o componentă suplimentară la impulsul mecanic. Astfel, perturbația produsă de fantă este *principlal incontrollabilă*.

Din analiza comportării microparticulelor, rezultă și că un sistem cuantic care se poate găsi într-o mulțime de stări, se poate găsi și în starea care rezultă din suprapunerea stărilor respective, existând o infinitate de moduri în care se poate realiza suprapunerea stărilor. Stările în care se poate afla sistemul cuantic se numesc *stări proprii*. La măsurarea unui sistem cuantic, dispozitivul de observație-măsură perturbă incontrollabil starea sistemului cuantic, forțându-l să treacă într-una din stările proprii ale sistemului. Stările proprii ale sistemului cuantic nu sunt perturbate când sistemul interacționează cu acel dispozitiv de observare-măsurare căruia îi sunt asociate aceste stări proprii.

## 6. Elemente de fizica stării solide

### 6.1. Generalități

Starea solidă este o stare condensată a materiei, caracterizată prin interacții interatomice suficient de puternice pentru a conferi materialului un volum propriu și o formă proprie. Într-un corp solid distanța dintre atomii alăturați este de ordinul de mărime al norului electronic din jurul fiecărui atom. Corpurile solide pot fi: (i) cristaline, care sunt caracterizate printr-o structură ordonată, pe domenii întinse având aceeași configurație și (ii) amorfe, care prezintă o structură de ordine numai pe domenii foarte restrânse, configurația fiind diferită în spațiu.

Solidele cristaline au atomii aranjați într-o rețea ordonată, păstrând aceeași aranjare la distanță mare. Se spune că un cristal este perfect dacă rețeaua cristalină se prelungește neîntreruptă în tot materialul. Rețeaua cristalină se caracterizează prin *constantele de rețea*, care sunt distanțe caracteristice între atomii rețelei. Cristalele reale prezintă unele abateri de la această structură ideală. Deseori putem întâlni atomi străini (*impurități*), care ocupă locuri în rețea (de exemplu atomi de arseniu în rețeaua cristalului de siliciu). Alteori apar dislocații în rețeaua cristalină, adică plane de atomi care au alunecat față de alte plane ale rețelei cristaline. Forțele responsabile de aranjarea atomilor în cristal determină trei tipuri de cristale: (i) cristale ionice, (ii) cristale covalente și (iii) cristale metalice.

*Cristalele ionice* sunt formate din ioni pozitivi și ioni negativi ai elementelor chimice, aranjați alternativ. Cristalele ionice sunt izolatoare la orice temperatură, deoarece în structura lor nu se găsesc electroni liberi.

*Cristalele metalice* sunt formate din ioni care pun în comun electronii lor de valență. Acești electroni formează un nor electronic uniform distribuit în rețeaua cristalină. Nefiind legați de un atom anume, acești electroni se mișcă liberi prin metal, ei putând circula printre ionii rețelei metalice și pot conduce curentul electric. Astfel metalele conduc curentul electric la orice temperatură.

*Cristalele covalente* se realizează cu atomi ai grupeii a patra a sistemului periodic. Acești atomi au câte patru electroni de valență. În rețeaua cristalină fiecare atom este înconjurat de patru vecini (cei mai apropiați) cu care pune în comun câte un electron de valență. În acest fel electronii săi de valență nu sunt foarte strâns legați de atom, deoarece fiecare atom de valență aparține în mod egal și atomului vecin cu care s-a realizat legătura covalentă. La anumite temperaturi, nu foarte ridicate, unii dintre electronii de valență pot rupe legătura covalentă și devin electroni liberi în cristal. Locul rămas liber în legătura covalentă de unde a plecat electronul se numește *gol de conducție*. Atât electronii liberi cât și golurile de conducție participă la conducția curentului electric din cristalul covalent. Cele mai importante cristale de acest tip se numesc *cristale semiconductoare*.

Una dintre caracteristicile importante ale corpurilor solide este comportarea rezistivității electrice,  $\rho$ , a acestora cu temperatura. Electronii liberi din metale sunt cei care transportă sarcina electrică prin rețeaua cristalului. *Rezistivitatea electrică* reprezintă intensitatea câmpului electric pe unitatea de densitate de

curent. Cu cât rezistivitatea electrică este mai mare, cu atât este mai intens câmpul electric necesar pentru stabilirea unei densități de curent date. Cu cât rezistivitatea electrică a unui material este mai mare, cu atât *conductivitatea electrică* este mai redusă. În SI unitatea de măsură pentru rezistivitatea electrică este  $[\rho] = 1 \Omega \cdot m$ . Conductivitatea electrică a unui material reprezintă posibilitatea ca sarcinile electrice să fie mobile prin corpuri realizate din aceste materiale, astfel încât să conducă curentul electric prin corp, la aplicarea unei diferențe de potențial.

*Izolatorii* sunt corpuri solide obținute prin legături ionice, în care nu se află electroni liberi. Aceste corpuri solide nu conduc curentul electric, deci au rezistivitate infinită. Izolatorii nu lasă nici sarcini electrice din afara lor să le străbată.

În metale electronii de valență, fiind slab legați de atomii ce formează rețeaua metalică, transportă curentul electric. Se poate arăta că metalele (*conductorii*) au o rezistivitate electrică ce crește cu temperatura, așa cum se poate vedea în Fig.6.1. a).

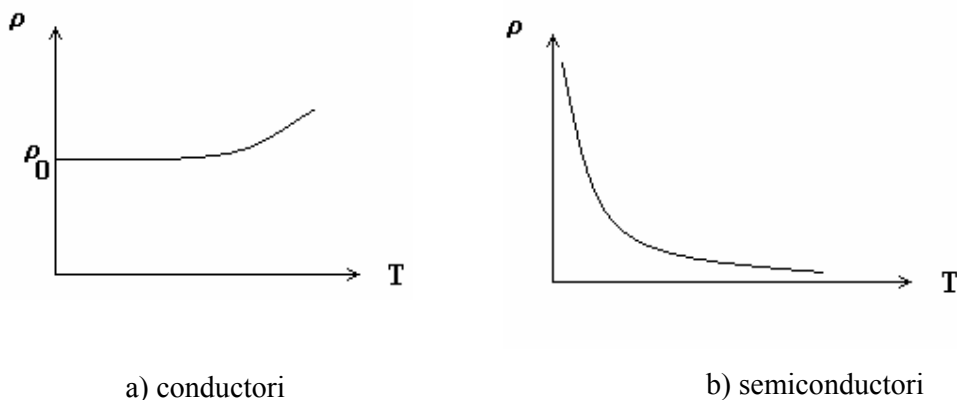


Fig.6.1. Variația rezistivității electrice cu temperatura la conductorii și semiconductorii.

S-a determinat experimental că rezistivitatea electrică a metalelor variază cu temperatura după legea:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha\Delta T) \quad (6.1)$$

unde  $\rho_0$  este rezistivitatea la temperatura de referință  $T_0$ ,  $\alpha$  este coeficientul termic al rezistivității, iar  $\Delta T = T - T_0$ , este diferența dintre temperatura  $T$  la care este exprimată rezistivitatea electrică și temperatura de referință.

*Semiconductorii* formează o clasă aparte în ceea ce privește conducția electrică. Sarcinile electrice de conducție din semiconductori, sau *purtătorii*, sunt *electronii de conducție și golurile*. Procesul de generare de electroni de conducție și de goluri constă în ruperea legăturilor covalente dintre anumiți atomi, rolul principal fiind jucat de temperatura la care se află semiconductorul: cu cât temperatura este mai mare cu atât crește numărul de legături covalente din care unii electroni de valență sunt puși în libertate, ei devenind *electroni de conducție*. Locurile lăsate vacante de acești electroni poartă numele de *goluri de conducție*, ele participând alături de electronii de conducție la transportul sarcinilor electrice, atunci când se aplică o tensiune electrică la capetele semiconductorului. Golurile de conducție sunt sarcini electrice pozitive. Creșterea numărului de purtători de sarcină electrică din semiconductor odată

cu creșterea temperaturii reprezintă procesul de scădere a rezistivității electrice a semiconductorului în funcție de temperatură, așa cum se vede în fig.6.1.b). Din această cauză semiconductorii se deosebesc fundamental de conductori.

## 6.2. Semiconductori

*Semiconductori intrinseci (puri).* Siliciul și germaniul sunt elemente din grupa a patra a sistemului periodic, având câte patru electroni pe învelișul exterior, numit și *strat de valență*. Creșterea cristalelor semiconductoare se realizează prin diferite metode, una din cele mai răspândite fiind solidificarea prin tragere lentă din topitură (cu viteze de tragere de 5-10 mm/h), utilizând un germene de cristal, care constituie "matrița" de aranjare a atomilor la interfața lichid- solid.

Dacă analizăm structura unui cristal de Si pur, vom observa că prin realizarea legăturilor covalente atomii sunt astfel așezați încât fiecare atom de Si este înconjurat de patru atomi vecini de Si, cu fiecare având în comun câte un electron de valență. Astfel structura de pe stratul exterior al fiecărui atom de Si este una de *octet*, adică fiecare atom de Si se comportă ca și cum ar avea el singur toți cei opt electroni pe stratul de valență, deși ai lui sunt doar patru. Reamintim că o structură cu un număr de opt electroni pe ultimul strat îi conferă atomului o stabilitate deosebită.

Dacă printr-un procedeu oarecare, de exemplu prin încălzirea cristalului, se rup unele din legăturile covalente, atunci se crează electroni liberi și goluri, în număr egal, deoarece fiecărei legături rupte îi corespunde un electron de conducție și un gol. Semiconductorii puri, sau *intrinseci*, se caracterizează prin egalitatea numărului de purtători de sarcină electrică negativă și pozitivă. Această egalitate se păstrează și la nivel de concentrații volumice de sarcină electrică ( $n_i = n_e = n_p$ ). Întrucât la temperaturi obișnuite numai o parte din electronii de valență sunt liberi să participe la conducția electrică, conductivitatea semiconductorilor puri este redusă. Conducția electrică din semiconductorii puri se numește *conducție intrinsecă*.

*Semiconductori cu impurități.* Pentru a mări conductivitatea electrică a semiconductorilor se realizează cristale covalente în care se introduc impurități în procesul de solidificare. Să considerăm că în topitura de germaniu (grupa a IV-a) se introduc atomi de arseniu (grupa a V-a). Se solidifică amestecul și se obține un cristal semiconductor de Ge impurificat sau *extrinsec*. Atomii de As au cinci electroni de valență, el fiind un element din grupa a V-a (pentavalent). În structura cristalină care se formează un atom de arseniu poate ocupa un loc al unui atom de germaniu. Atomul de As va forma cu patru din atomii de Ge cei mai apropiați câte o legătură covalentă, comportându-se, din acest punct de vedere, ca un atom de Ge. Cel de-al cincilea electron al atomului de As nu va mai fi "legat" de nici un vecin, el rămânând foarte slab legat de atomul de As. Acest electron devine electron liber chiar la temperatura camerei. Golul ce-i corespunde nu poate deveni gol de conducție, deoarece se află în nucleul de As. Astfel, de la fiecare atom de impuritate pentavalentă se crează câte un electron de conducție. Concentrația de impurități poate ajunge până la un

atom la  $10^{10}$  atomi de germaniu. Acest tip de semiconductor se numește de *semiconductor de tip n*, deoarece numărul electronilor de conducție este mai mare decât numărul golurilor de conducție. Concentrația electronilor de conducție este mai mare decât cea a golurilor de conducție, de aceea electronii sunt *purtători majoritari*.

În cazul în care se folosesc atomi trivalenți, ca de exemplu atomi de Galiu, care au numai trei electroni în stratul de valență, se obține un semiconductor cu un număr mai mare de goluri de conducție decât electroni de conducție, numit *semiconductor de tip p*. Acest tip de conducție electrică, prin intermediul impurităților de concentrație controlată se numește *conducție extrinsecă*, iar semiconductorii impurificați cu impurități de tip p sau de tip n se numesc semiconductori *extrinseci*.

### 6.3. Dispozitive cu semiconductori

*Joncțiunea semiconductoare p-n.* Dispozitivele electronice semiconductoare au în prezent cea mai mare răspândire. Aceste dispozitive utilizează *joncțiunea p-n*, formată dintr-un cristal de germaniu (sau siliciu) ce a fost impurificat într-o regiune cu atomi pentavalenți (de tip n) și în alta cu atomi trivalenți (de tip p), regiunile fiind separate de o zonă numită *joncțiune*.

Fenomenul principal din joncțiunea p-n este difuzia sarcinilor electrice majoritare (goluri în zona p și electroni în zona n) dintr-una din zone în cealaltă zonă. Trecând în zona în care electronii sunt majoritari, golurile din zona p se vor recombina cu unii din electronii din această zonă. La rândul lor, unii din electronii majoritari în zona n vor difuza în cealaltă zonă, combinându-se cu unele goluri de acolo. La contactul celor două zone se realizează o *regiune de baraj*: în zona n se află o sarcină electrică pozitivă netă (obținută prin difuzia electronilor în zona p), iar în zona p se află sarcină electrică negativă (obținută prin difuzia golurilor spre zona n). În joncțiune ia naștere un câmp electric orientat dinspre zona n spre zona p.

*Dioda semiconductoare.* Dacă se conectează o joncțiune p-n într-un circuit electric exterior, se obține o diodă semiconductoare. Aplicând o tensiune variabilă în circuitul din fig.6.2.a), se constată că dispozitivul conduce curentul electric dacă polarizarea este cea indicată în figură, adică cu potențialul pozitiv la zona p. În aceste condiții, în care se manifestă conducția într-un singur sens prin joncțiune, putem afirma că joncțiunea semiconductoare p-n funcționează ca *diodă*.

Comportarea joncțiunii p-n ca diodă se datorează mecanismului de conducție electrică a celor două zone, pe care-l vom descrie calitativ. Atunci când regiunea p se află la un potențial pozitiv, deci mai ridicat decât regiunea n, se reduce valoarea potențialului electric din zona de baraj a diodei, astfel că este facilitată trecerea golurilor din regiunea p către regiunea n, iar a electronilor din zona n către regiunea p. Cele două tipuri de purtători contribuie la formarea curentului prin diodă, așa cum se poate vedea în fig.6.2.b). Atunci când se inversează polaritatea aplicată pe diodă, câmpul electric din zona de baraj crește și mai mult, împingând electronii din zona p în zona n și golurile din regiunea n spre regiunea p.

Dar în regiunea n concentrația de goluri este foarte redusă (se datorează numai conductivității intrinseci și migrației din zona p). În mod similar, în zona p concentrația de electroni este redusă. De aceea la polarizare negativă pe zona p a diodei se obțin curenți foarte reduși (vezi fig.6.2.b).

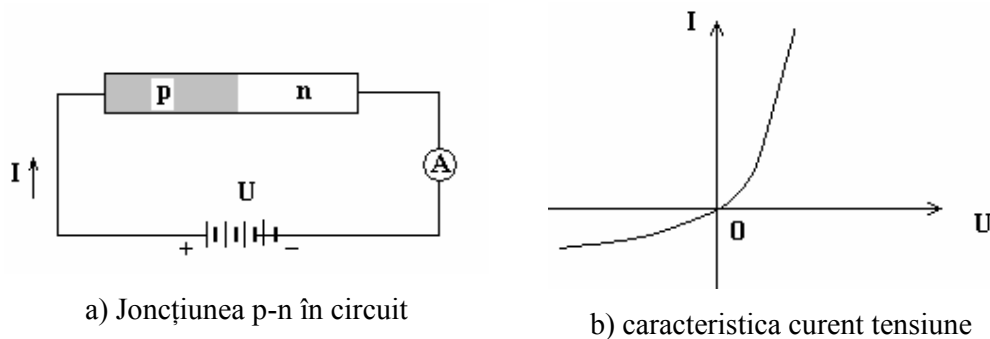


Fig.6.2. Dioda semiconductoră

O analiză cantitativă a procesului arată că relația dintre tensiunea și intensitatea curentului electric prin diodă este de forma:

$$I = I_0 \left( e^{\frac{eU}{kT}} - 1 \right) \quad (6.2)$$

unde  $I_0$  este o constantă caracteristică tipului de semiconductor,  $e$  este sarcina electronului,  $k$  este constanta lui Boltzmann, iar  $T$  este temperatura absolută.

*Tranzistorul.* Un tranzistor este un dispozitiv format din două joncțiuni p-n, așezate în configurația p-n-p sau n-p-n. Cele trei zone ale tranzistorului se numesc *bază*, *emitor* și *colector*, fiind legate în circuitul tranzistorului p-n-p ca în fig.6.3.

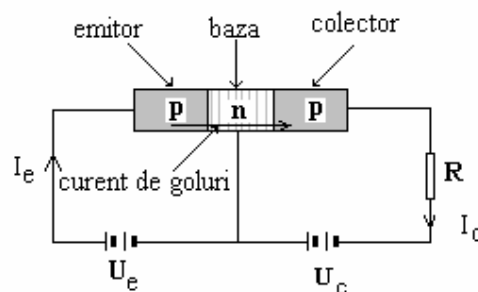


Fig.6.3. Tranzistorul p-n-p în circuit.

Se observă că tensiunea bază-colector este cu polarizare inversă, ceea ce va determina ca în absența sursei dintre emitor și bază, prin colector să treacă un curent foarte redus. Acest curent reprezintă efectul polarizării inverse a unei joncțiuni p-n. Dar dacă între emitor și bază se aplică o tensiune directă,  $U_e$ , așa cum se vede în fig.6.3, atunci golurile din emitor se pun în mișcare și trec prin bază, spre joncțiunea bază-colector. Ele trec apoi și prin colector, generând un curent electric prin rezistența din circuitul bază-

colector. Astfel prin circuitul colectorului trece un curent a cărui intensitate este controlată de curentul din circuitul emitorului. Tensiunea din circuitul colectorului,  $U_c$ , controlează puterea electrică disipată pe rezistorul R. Dacă  $U_c > U_e$ , tranzistorul funcționează ca amplificator de tensiune.

*Circuitul integrat.* Prin procesul de depunere pe un suport a unor straturi de material, urmată de gravarea unor configurații ale circuitelor electronice se obține îmbinarea funcției mai multor diode, tranzistori, rezistențe și condensatori pe o singură plăcuță semiconductoare, realizându-se circuitul integrat. Suprafața circuitelor integrate este de circa  $2 \text{ mm}^2$ , de unde rezultă miniaturizarea ansamblelor, care devin tot mai compacte, dar mai complexe și mai sofisticate.



## Bibliografie

1. R.P.Feynman, Fizica Modernă, volumele I-III, Ed.Tehnică, București, 1969
2. F.W.Sears, M.W.Zemansky, H.D.Young, Fizică, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983
3. Cursul de Fizică de la Berkeley, Volumele I-IV, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983
4. D.Halliday și R.Resnick, Fizică, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1975;
5. D.Popov și I.Damian, Elemente de fizică generală, Editura Politehnica, 2001
6. V.Dorobanțu, Fizica, între teamă și respect, Vol. I, Mecanica clasică, Editura Politehnica, 2003
7. U.Haber-Schaim, J.B.Cross, J.H.Dodge, J.A.Walter, Fizica, PSSC, Textul elevului, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1975
8. U.Haber-Schaim, J.B.Cross, J.H.Dodge, J.A.Walter, Fizica, PSSC, Supliment de teme avansate, Ghidul profesorului, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1974
9. C.Vrejoiu și colectiv, Fizică, Mecanică pentru perfecționarea profesorilor, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983
10. Al.Necula, Electricitate și magnetism, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1973
11. A.Hristev, Mecanică și acustică, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1984
12. E.Nicolau, Radiația electromagnetică, Ed.Academiei RSR, București, 1973
13. E.Nicolau, Radiația și propagarea undelor electromagnetice, Ed. Academiei RSR, București, 1989
14. S.E.Friș și A.V.Timoreva, Curs de Fizică generală, Editura Tehnică, București, 1973
14. C.Plăvițu și co-autori, Probleme de mecanică fizică și acustică, Ediția a II-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981
15. Compendiu de Fizică pentru admitere în învățământul superior, Prefață de C.Constantinescu, Ed. Științifică, București, 1971
16. A.S.Davîdov, Teoria corpului solid, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1982
17. Colectiv Catedra de Fizică, Univ."Politehnica" din Timișoara, Teste grilă de Fizică pentru examenul de bacalaureat și admitere în învățământul superior, Colecția "LICEU", Editura Politehnica, 2002

