RAPORT DE CERCETARE

Grant: Nr. 504

Autor: PROF. DR. MARINCA VASILE

Universitatea: „POLITEHNICA" TIMIŞOARA FAC. MECANICĂ

METODE NUMERICE ORIGINALE APLICATE ÎN STUDIUL VIBRAȚIILOR PARAMETRICE ŞI NELINIARE

PROF. DR. MARINCA VASILE, UNIVERSITATEA „POLITEHNICA" TIMIŞOARA FAC. MECANICĂ

1. INTRODUCERE

În cele ce urmează ne propunem să punem în evidență numai câteva dintre metodele originale aproximative de rezolvare a ecuațiilor diferențiale parametrice şi neliniare care apar în studiul vibrațiilor. Originalitatea constă nu numai în modul de tratare în cadrul vibrațiilor, (în parte metodele sunt folosite în matematica) ci şi în elementele de noutate absolută care pentru prima dată în lucrările ştiințifice ale membrilor colectivului de cercetare. Astfel metoda funcțiilor spline sau a echivalenței liniare sunt puțin cunoscute şi folosite în literatura de specialitate. Pe de altă parte, metoda iterativ-variațională în varianta prezentată în cele ce urmează apare pentru prima dată în lucrări ştiințifice ale unor colaboratori la acest proiect.

Am folosit programe de calcul care ne-au facilitat paşii făcuți în rezolvarea problemelor apărute. Rezultatele sunt comparate cu cele cunoscute în literatura de specialitate. Funcțiile spline cubice sunt folosite în studiul vibrațiilor de torsiune ale unor bare neuniforme Timoşenko fixată pe suporți elastici. Soluția este obținută prin transformarea ecuațiilor diferențiale ordinare în ecuații integrale şi apoi acestea sunt rezolvate numeric. Funcțiile spline cubice satisfac condițiile geometrice, de continuitate şi la limită. Studiul pune în evidență efectele rigidității, a legăturilor elastice şi a maselor adiționale. Metoda echivalenței liniare este o metodă constructivă foarte puțin cunoscută în literatură: ecuația Bernoulli-Euler este transformată într-un operator polinomial iar acestuia i se aplică o transformare exponențială. Folosind transformata Laplace, se ajunge la sisteme diferențiale liniare infinite.

Bara Bernoulli-Euler sprijinită pe suporți multipli şi acționată de o forță axială este studiată prin intermediul funcției lui Green. Se studiază bara supusă la diferite legături geometrice, iar bara Timoşenko conținând mase concentrate este studiată cu ajutorul transformatei Laplace. De asemenea se ține seama şi de inerția de rotație a maselor concentrate. Metoda iterativ-variațională aplicată în studiul barelor Timoşenko conținând mase adiționale este o altă metodă originală, studiată de colectivul de cercetare al acestei teme. Rezultatele obținute sunt publicate în numeroase lucrări ştiințifice în țară şi străinătate.

2. FOLOSIREA FUNCȚIILOR SPLINE CUBICE PENTRU STUDIUL VIBRAȚIILOR BARELOR TIMOŞENKO NEUNIFORME

Intervalul [0,1] este divizat echidistant Δ: $x_0 = 0<x_1< x_2< \ldots<x_n =1$ cu $x_j - x_{j-1} = \frac{1}{N} =: h$

iar X_{p0}, X_{p1}, …, X_{pN} sunt p valori fixate arbitrar. Funcțiile $S_p(x)$ sunt continue împreună cu primele două derivate şi coincid cu X_{pj} în punctele x = x (j), (j=0,N). Funcțiile $S_p(x)$ sunt funcții spline în raport cu măsura Δ. Se obține:

$$S_p(x) = X''_{pj}\frac{(x - x_{j-1})^3}{6h} + X''_{pj-1}\frac{(xj - x)^3}{6h} + \frac{1}{h}\left(X_{pj} - \frac{1}{6}X''_{pj}h^2\right)(x - x_{j-1}) +$$

$$+\frac{1}{h}\left(X_{pj-1} - \frac{1}{6}X''_{pj-1}h^2\right)(x_j-x) \qquad (1)$$

unde X_{pj}"= S_p"(xj). Continuitatea lui S_p'(x) în x_j, folosind relația $S_p'(x_j-0) = S_p'(x_j+0)$ conduce la sistemul de ecuații:

$$2X''_{po}+X''_{p1}=\frac{6}{h^2}\left(X_{p1}-X_{po}-hX'_{po}\right)$$

$$X''_{pj-1}+4X''_{pj}+X''_{pj+1}=\frac{6}{h^2}\left(X_{pj+1}-2X_{pj}+X_{pj-1}\right),\ j=\overline{1,N-1} \tag{2}$$

$$X''_{pN-1}+2X''_{pN}=\frac{6}{h^2}\left(4X'_{pN}-X_{pN}+X_{pN-1}\right)$$

care se mai scrie în formă matricială astfel:

$$[P]\{X''_p\}=[Q]\{X_p\}+\overline{\{X_p\}} \tag{3}$$

cu [P] şi [Q] matrici pătrate de ordinul (N+1)x(N+1) iar$\{X_p\}$şi$\{X_p\}$ matrici coloană de ordinul N+1. Din relația (3) obținem:

$$X''_{pi}=\sum_{l=0}^{N}a_{il}X_{pl}+b_{io}X'_{po}+b_{iN}X'_{pN} \tag{4}$$

unde

$$a_{ij}=\left([P]^{-1}[Q]\right)_{ij};b_{io}X'_{po}+b_{iN}X'_{pN}=\left([A]^{-1}\left\{\overline{X}_p\right\}\right)_i \tag{5}$$

Vibrațiile unei bare neuniforme Timoşenko sunt date de ecuațiile:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\rho\cdot A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2};\frac{\partial M}{\partial x}=Q-\rho I\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2};\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{M}{EI};\frac{\partial y}{\partial x}=\psi+\frac{Q}{KAG} \tag{6}$$

notațiile fiind cele cunoscute. Separând variabilele, presupunem

$$y(x,t)=Y(x)e^{i\omega t};\ \Psi(x,t)=\Psi(x)\,e^{i\omega t};\ M(x,t)=\overline{M}(x)\,e^{i\omega t};\ Q(x,t)=\overline{Q}(x)\,e^{i\omega t} \tag{7}$$

astfel că se obține sistemul:

$$\frac{d\overline{Q}}{dx}=-\rho A\omega^2 Y;\frac{d\overline{M}}{dx}=\overline{Q}+\rho\omega^2 I\psi\,\frac{d\psi}{\partial x}=-\frac{\overline{M}}{EI};\frac{dY}{dx}=\psi+\frac{\overline{Q}}{KAG} \tag{8}$$

Presupunem că

$$A(x)=A_0\left(1+C\frac{x}{l}\right);I(x)=I_0\left(1+C\frac{x}{l}\right)^3$$

unde C este o constantă, l este lungimea barei iar A_0, I_0 sunt A(x) şi I(x) pentru x=0.

Folosind expresiile adimensionale:

$$X_1=-\frac{l^2\overline{Q}}{EI_0};X_2=-\frac{l\overline{M}}{EI_0};X_3=\psi;X_4=\frac{Y}{l};\eta=\frac{x}{l} \tag{9}$$

ecuațiile diferențiale (8) se scriu în forma:

$$\frac{dX_p}{d\eta}=\sum_{k=1}^{4}G_{pk}X_k,\ p=\overline{1,4} \tag{10}$$

unde

$$G_{14}=\Omega^2(1+C\eta);G_{21}=1;G_{23}=\Omega^2r^2(1+Cn)^3;G_{32}=\frac{1}{(1+Cn)^3}$$

$$G_{41}=-\frac{s^2}{1+C\eta};G_{43}=1;\Omega^2=\frac{\rho A_0\omega^2l^4}{EI_0};r^2=\frac{I_0}{l^2A_0};s^2=\frac{EI_0}{KA_0Gl^2} \tag{11}$$

ceilalți G_{ij} = 0.

Prin integrarea sistemului (10) pe intervalul [0,η], obținem:

$$X_p(\eta) = X_p(0) + \int_0^{\eta} \sum_{k=1}^{4} G_{pk} S_k(t)dt \tag{12}$$

unde $S_k(t)$ sunt funcțiile spline (1). Împărțind intervalul [0,1] în N intervale echidistante şi înlocuind $\eta = x_j, j = \overline{0, N}$ în ecuațiile (12), se obține:

$$X_{pj} = X_{po} + \sum_{i=1}^{j} \sum_{k=1}^{4} \int_{x_{i-1}}^{x_i} G_{pk}(\eta) S_k(\eta) d\eta \tag{13}$$

unde

$$X_{pj} = X_p(x_j), j = \overline{0, N}, \left(X_{po} = X_p(x_o) = X_p(0)\right)$$

Înlocuind (1) în (13), obținem:

$$X_{pj} = X_{po} + \sum_{i=1}^{j} \sum_{k=1}^{4} g_{pki} X_{ki}^{''} + \sum_{i=1}^{j} \sum_{k=1}^{4} h_{pki} X_{ki} \tag{14}$$

cu g_{pki}, h_{pki} coeficienții lui X_{ki}” şi respectiv X_{ki} din substituția făcută.

Folosind condițiile la limită (la η=0 şi η=1) în ecuațiile (10), obținem:

$$X_{po}^{'} = \sum_{k=1}^{4} \alpha_{pk} X_{ko}; X_{pN}^{'} = \sum_{k=1}^{4} \beta_{pk} X_{kN} \tag{15}$$

Substituim relațiile (15) în ecuațiile (4) şi acestea în (14) obținem un sistem de ecuații omogene în X_{kj}:

$$-X_{pj+1} + X_{pj} + \sum_{k=1}^{4} \sum_{l=0}^{N} g_{pkj+1} X_{kl} + \sum_{k=1}^{4} h_{pkj+1} X_{kj+1} + \sum_{k=1}^{4} \sum_{s=1}^{4} g_{pkj+1} b_{j+1} \alpha_{ks} X_o + \sum_{k=1}^{4} \sum_{s=1}^{4} g_{pkj+1} b_{j+1N} \beta_{ks} X_{sN} = 0,$$

$$j=\overline{0,N} \tag{16}$$

În legătură cu ecuațiile (16) se introduc matricile următoare:

$$[H]_{pk} = \begin{bmatrix} h_{pk0} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & h_{pk1} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & h_{pk2} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & h_{pkN} \end{bmatrix}; \quad [B]_{pk} = \begin{bmatrix} b_{00} \sum_{i=1}^{4} g_{pi0} \alpha_{ik} & 0 & 0 & \vdots & 0 & b_{0N} \sum_{i=1}^{4} g_{pi0} \beta_{ik} \\ b_{10} \sum_{i=1}^{4} g_{pi1} \alpha_{ik} & 0 & 0 & \vdots & 0 & b_{iN} \sum_{i=1}^{4} g_{pi1} \beta_{ik} \\ b_{20} \sum_{i=1}^{4} g_{pi2} \alpha_{ik} & 0 & 0 & \vdots & 0 & b_{2N} \sum_{i=1}^{4} g_{pi2} \beta_{ik} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ b_{N0} \sum_{i=1}^{4} g_{piN} \alpha_{ik} & 0 & 0 & \vdots & 0 & b_{NN} \sum_{i=1}^{4} g_{piN} \beta_{ik} \end{bmatrix}$$

$$[M]_{pk} = \delta_{pk}[A] + [G]_{pk} + [H]_{pk} + [B]_{pk}, \qquad p,k=\overline{1,4} \tag{17}$$

Soluția nebanală a sistemului (16) conduce la anularea determinantului caracteristic (determinant celular):

$$\det \begin{vmatrix} [M]_{11} & [M]_{12} & [M]_{13} & [M]_{14} \\ [M]_{21} & [M]_{22} & [M]_{23} & [M]_{24} \\ [M]_{31} & [M]_{32} & [M]_{33} & [M]_{34} \\ [M]_{41} & [M]_{42} & [M]_{43} & [M]_{44} \end{vmatrix} = 0 \tag{18}$$

Soluțiile ecuației (18) conduc la aflarea coeficientului frecvență de forma:

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho A_0}{EI_0}}\omega l^2$$

În cele ce urmează, considerăm bara Timoşenko în consolă, cu un corp greu la capătul liber. Condițiile la limită sunt:

$$y(0) = 0, \Psi(0) = 0, Q(l) = -m\ddot{y}(l); M(l) = J\ddot{\Psi}(l).$$

Cu notațiile $\Phi = \frac{m}{\rho A_o l}; \delta^2 = \frac{J}{ml^2}$, matricile [α] şi [β] din (15) sunt:

$$[\alpha] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s^2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; [\beta] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \Omega^2(1+c) \\ 0 & 0 & \Omega^2 r^2(1+c) & -\Phi\Omega^2 \\ 0 & 0 & \frac{\Phi^2\delta^2\Omega^2}{(1+c)^3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\Phi\Omega^2 s^2}{1+c} \end{vmatrix} \quad (19)$$

Pentru diferite valori ale constantei c şi pentru φ=20, r=0,03 obținem valorile parametrului Ω care sunt comparate cu cele cunoscute în [10] prin metoda Simpson:

c	Prezentul studiu		Lucrarea [10]
	N = 5	N = 10	
0	0,803	0,801	0,799
$-\frac{1}{6}$	0.793	0,789	0,785
$-\frac{2}{6}$	0.780	0,776	0,771
$-\frac{3}{6}$	0,761	0,758	0,755
$-\frac{4}{6}$	0,748	0,744	0,739
$-\frac{5}{6}$	0,729	0,725	0,724

3. METODA ECHIVALENȚEI LINIARE ÎN STUDIUL VIBRAȚIILOR BARELOR BERNOULLI-EULER

Ecuația diferențială exactă a vibrațiilor unei bare Bernoulli-Euler este de forma:

$$y''' = \frac{M}{EI}\sqrt{1+y'^2}^3 \quad (20)$$

cu condițiile la limită pentru bara în consolă:

$$y(0) = 0, y'(0) = 0 \quad (21)$$

Pentru aplicarea metodei echivalenței liniare (MEL), considerăm transformarea:

$$w = \sqrt{1+y'^2}; u = y' \quad (22)$$

Astfel că ecuația (20) devine:

$$\frac{dw}{dx} = kuw^2; \frac{du}{dx} = kw^3; \left(k = \frac{M}{EI} \right) \qquad (23)$$

iar condițiile (21) devin:

$$w(0) = 1; u(0) = 0 \qquad (24)$$

Echivalarea liniară depinde de doi parametri Z_1 şi Z_2 astfel că se poate scrie:

$$v(x, Z_1, Z_2) = e^{Z_1 w + Z_2 u} \qquad (25)$$

Sistemul liniar corespunzător sistemului (23) este:

$$v_{ij}^{'} = k\left(i v_{i+1, j+1} + j v_{i+3, j-1}\right) \qquad (26)$$

Aplicăm transformata Laplace:

$$L v_{ij}(x) = V_{ij}\overline{(s)} = \int_0^{\infty} v_{ij}(x) e^{-sx} dx$$

astfel că ecuațiile (26) se pot scrie matricial:

$$AV = Y_0 \qquad (27)$$

unde matricea A este matricea celulară infinită:

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & A_{33} & A_{35} & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & A_{55} & A_{57} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix} \qquad (28)$$

cu celulele:

$$A_{2i-1,2i-1} = \begin{vmatrix} s & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & s & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & s & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{vmatrix} \quad \text{de ordinul } (2i)\text{x}(2i)$$

$$A_{2i-1,2i+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1-2i & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2-2i & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3-2i & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4-2i & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 1-2i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{de ordinul } (2i) \text{ x } (2i+2)$$

$$Y_0 = \begin{Bmatrix} Y_{01} \\ Y_{03} \\ \vdots \end{Bmatrix} \; ; \; Y_{0,2j-1} = \left\{ d_i^j \right\} \quad 1 \leqslant i \leqslant 2j$$

Introducem matricea celulară infinită:

$$B = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \ldots & B_{1K} & \ldots \\ 0 & B_{22} & B_{23} & \ldots & B_{2K} & \ldots \\ 0 & 0 & B_{33} & \ldots & B_{3K} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \qquad (29)$$

ca ,,inversă" a matricei A şi deci cu proprietatea BA = diag (E_1,E_2,E_3, …) cu $E_i = \delta_i^k$ matricea unitate de ordinul n^{-1+i} , ecuația (27) are soluția:

$$V = BY_0 \tag{30}$$

Ținând cont că în relația (30) este importantă numai prima linie, se obține:

$$V_1(s) = \sum_{i\geq 1} B_{1i}(s) Y_{0i} \tag{30'}$$

Aplicând transformata Laplace inversă:

$$L^{-1}\overline{V}_{ij}(s) = v_{ij}(x)$$

în relația (30'), se determină soluția exactă a ecuației (20):

$$y(x)= L^{-1}\overline{V}_{ij}(s)$$

care în cazul barei Bernoulli-Euler devine prin trunchiere:

$$\dot{y}(x) = \sum_{j=1}^{m} B_{12j-1} Y_{0,2j-1}$$

Pentru E=21000 [KN/cm^2], I=1/2 [cm^4] şi definind ε=max| y"-k(1+y'^{2})$^{3/2}$| x⊂[0,1] obținem pentru diferite valori ale lui m(L=100 cm):

m	y'(x)	y(x)	ε
2	kx	$\frac{1}{2}kx^2$	8,57 *10^{-4}
4	kx + $\frac{1}{2}kx^2$	$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{8}k^3x^4$	1,62 *10^{-4}
6	$kx + \frac{1}{2}(kx)^3 + \frac{3}{8}(kx)^5$	$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{8}k^3x^4 + \frac{3}{40}k^5x^6$	2,82 *10^{-5}
8	$kx + \frac{1}{2}(kx)^3 + \frac{3}{8}(kx)^5 + \frac{5}{16} + (kx)^7$	$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{8}k^3x^4 + \frac{3}{40}k^5x^6 + \frac{5}{112}k^7x^8$	3,89 *10^{-6}

Observația 1:

Cele două metode prezentate în studiul vibrațiilor neliniare dau rezultate foarte bune în comparație cu cele cunoscute în literatutră (la prima metodă) sau eroare de trunchiere satisfăcătoare (a doua metodă). Metodele sunt puțin cunoscute cercetătorilor, iar prin programe specifice pe calculator dau rezultate apreciabile care au fost publicate în multe lucrări ştiințifice în țară şi străinătate. Cele prezentate în acest material sunt o parte a rezultatelor originale obținute de colectivul de cercetare în ultimii ani.

4. VIBRAȚIILE UNEI BARE B-E SPRIJINITĂ PE SUPORȚI MULTIPLI ŞI ACȚIONATĂ DE O FORȚĂ AXIALĂ

În acest paragraf se consideră o bară Bernoulli-Euler care se sprijină în R puncte şi este acționată de forța constantă axială P:

$$EI\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} - P\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{R} F_i(t)\delta(x-h_i), x \in [0,1] \tag{31}$$

unde F_i sunt forțe de legătură iar δ este funcția lui Dirac.

Separând variabilele, se obține ecuația diferențială:

$$W^{IV}(x) - PW^{II}(x) - \alpha^4 W(x) = \sum_{i=1}^{R} F_i\delta(x-h_i) \tag{32}$$

unde

$$\alpha^4 = \omega^4\left(\frac{\rho A}{EI}\right)^2 \tag{33}$$

Soluția ecuației (32) este de forma:

$$W(x) = \sum_{i=1}^{R} F_i G(x, h_i, \alpha) \tag{34}$$

unde G(x, h_i, α) este funcția lui Green, care va fi soluția ecuației:

$$G^{(IV)}(x,\lambda,\alpha) - PG^{II}(x,\lambda,\alpha) - \alpha^4 G(x,\lambda,\alpha) = \delta(x-\lambda) \tag{35}$$

în care condițiile la limită vor fi aceleaşi ca la ecuația (32). Ecuația caracteristică se obține pentru $x \to h_i$, i=$\overline{1,R}$ în ecuația (34), astfel că rezultă un sistem R dimensional de ecuații algebrice omogene

$$[A(\alpha)]\{F\} = \{0\} \tag{36}$$

unde elementele matricei [A] sunt

$$A_{i,j}(\alpha) = G(h_i, h_j, \alpha) \tag{37}$$

Determinantul matricei coeficienților egal cu zero, conduce la ecuația caracteristică din care se deduc valorile proprii ale sistemului cu legături: α_r , r=1,2,… Pentru a determina ecuația caracteristică, urmează să se calculeze funcția lui Green din ecuația (35). Pentru aceasta, fie $x \in [0,\lambda]$ şi se presupune că G este de forma:

$$G = A\cosh ax + B\sinh ax + C\cos bx + D\sin bx \tag{38}$$

unde

$$a = \sqrt{\frac{P+Q}{2}}, \quad b = \sqrt{\frac{Q-P}{2}}, \quad Q = \sqrt{P^2 + 4\alpha^2} \tag{39}$$

Prin derivarea relației (38), după care se înlocuieşte x=0, se obțin parametrii inițiali:

$$\begin{gathered} G(0,\lambda;\alpha) = A + C = W_0, \qquad G^I(0,\lambda;\alpha) = aB + bD = \theta_0 \\ G^{II}(0,\lambda;\alpha) = a^2A - b^2C = -M_0, \qquad G^{III}(0,\lambda;\alpha) - PG^I(0,\lambda;\alpha) = ab^2B - ba^2D = -V_0 \end{gathered} \tag{40}$$

Înlocuind în (38) aceste condiții, se obține:

$$G(x,\lambda;\alpha)=\frac{W_0}{a^2+b^2}\left(b^2\cosh ax+a^2\cos bx\right)+\frac{\theta_0}{a^2+b^2}(a\sinh ax+b\sin bx)+$$
$$\frac{M_0}{a^2+b^2}(\cos bx-\cosh ax)+\frac{V_0}{a^2+b^2}(\frac{1}{b}\sin bx-\frac{1}{a}\sin ax) \quad (41)$$

Pentru $x\in[\lambda,1]$, funcția lui Green devine:

$$G(x,\lambda;\alpha)=\frac{W_0}{a^2+b^2}\left(b^2\cosh ax+a^2\cos bx\right)+\frac{\theta_0}{a^2+b^2}(a\sinh ax+b\sin bx)+$$
$$+\frac{M_0}{a^2+b^2}(\cos bx-\cosh ax)+\frac{V_0}{a^2+b^2}(\frac{1}{b}\sin bx-\frac{1}{a}\sin ax)-\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{b}\sin b(x-\lambda)-\frac{1}{a}\sinh a(x-\lambda)\right] \quad (42)$$

Funcția lui Green, trebuie să fie simetrică, deci trebuie să schimbăm locurile lui x şi λ între ele, astfel că:

$$G(x,\lambda;\alpha)=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{cases}N(\lambda,x;\alpha);0\le x\le\lambda\\ N(x,\lambda;\alpha);\lambda\le x\le 1\end{cases} \quad (43)$$

unde

$$N(x,\lambda;\alpha)=W_0\left(b^2\cosh ax+a^2\cos bx\right)+\theta_0(a\sinh ax+b\sin bx)+$$
$$M_0(\cos bx-\cosh ax)+V_0(\frac{1}{b}\sin bx-\frac{1}{a}\sinh ax)+\left[\frac{1}{a}\sinh a(x-\lambda)-\frac{1}{b}\sin b(x-\lambda)\right] \quad (44)$$

Parametrii inițiali W_0, θ_0, M_0 şi V_0 se determină din condițiile la limită. Se consideră următoarele 5 situații:

4.1. Bara dublu articulată:

$$W_0=0,\qquad \theta_0=\frac{a^2+b^2}{\Delta ab}\left[\sinh a\sin b(1-\lambda)-\sin b\sinh a(1-\lambda)\right],\quad M_0=0 \quad (45)$$

$$V_0=\frac{b(a^2+b^2)}{\Delta a}\sin b\sinh a(1-\lambda)+\frac{a(a^2+b^2)}{\Delta b}\sinh a\sin b(1-\lambda) \quad (46)$$

$$\Delta=\frac{(a^2+b^2)^2}{ab}\sinh a\sin b$$

4.2. Bara dublu încastrată:

$$W_0=0,\qquad \theta_0=0,$$
$$M_0=\frac{1}{\Delta}[\left(\cosh a\cos b-1\right)\left(\frac{1}{b}\sin b\lambda+\frac{1}{a}\sinh a\lambda\right)+\sinh a\sin b\left(\frac{1}{a}\sin b\lambda-\frac{1}{b}\sinh a\lambda\right)+$$
$$(\cos b\lambda-\cosh a\lambda)\left(\frac{1}{a}\sinh a\cos b-\frac{1}{b}\cosh a\sin b\right)$$

$$V_0 = \frac{1}{\Delta}[(1-\cosh a\cos b)(\cos b\lambda + \cosh a\lambda) + \frac{1}{ab}\sinh a\sin b(a^2\cos b\lambda - b^2\cosh a\lambda) -$$
$$(a\sin b\lambda - b\sin a\lambda)(\frac{1}{a}\cosh a\sin b + \frac{1}{b}\sinh a\cos b)] \quad (47)$$
$$\Delta = 2(1-\cosh a\cos b) + \frac{a^2b^2}{ab}\sinh a\sin b$$

4.3. Bara încastrată la un capăt şi liberă la celălalt:

$$W_0 = 0, \qquad \theta_0 = 0,$$
$$M_0 = -\frac{1}{\Delta}[ab(a\sin b\lambda + b\sinh a\lambda) + (\cos b\lambda - \cosh a\lambda)(a^3\sinh a\cos b - b^3\cosh a\sin b) +$$
$$\cosh a\cos b(b^3\sinh b\lambda + a^3\sinh a\lambda) + \sinh a\sin b(a^3\sin b\lambda - b^3\sinh a\lambda)] \quad (48)$$
$$V_0 = \frac{1}{\Delta}[a^2b^2(\cos b\lambda + \cosh a\lambda) - ab\sinh a\sin b(b^2\cos b\lambda - a^2\cosh a\lambda) +$$
$$\cosh a\cos b(a^4\cos b\lambda + b^4\cosh a\lambda) + (a\sin b\lambda - b\sinh a\lambda)(a^3\cosh a\sin b + b^3\sinh a\cos b)]$$
$$\Delta = 2a^2b^2(1+\cosh a\cos b)$$

4.4. Bara încastrată la un capăt şi articulată la celălalt:

$$W_0 = 0, \qquad \theta_0 = 0,$$
$$M_0 = \frac{a^2+b^2}{\Delta ab}[\sinh a\sin b(1-\lambda) - \sin b\sinh a(1-\lambda)]\text{s} \quad (49)$$
$$V_0 = \frac{a^2+b^2}{\Delta}[\frac{1}{a}\cos b\sinh a(1-\lambda) - \frac{1}{b}\cosh a\sin b(1-\lambda)]$$
$$\Delta = (a^2+b^2)(\frac{1}{a}\cos b\sinh a - \frac{1}{b}\cosh a\sin b)$$

4.5. Bara liberă la ambele capete:

$$W_0 = \frac{1}{\Delta}[a^2b^2(\cosh a\cos b - 1)(b\sin b\lambda - a\sinh a\lambda) + (a^2\cos b\lambda + b^2\cosh a\lambda)(a^3\sinh a\cos b -$$
$$b^3\cosh a\sin b) + \sinh a\sin b(a^5\sin b\lambda + b^5\sinh a\lambda)]$$
$$\theta_0 = \frac{1}{\Delta}[a\ b^2(1-\cosh a\cos b)(a^2\cos b\lambda - b^2\cosh a\lambda) - ab(b\sin b\lambda +$$
$$a\sinh a\lambda)(a^3\cosh a\sin b + b^3\sinh a\cos b) + ab\sin b\sinh a(a^4\cosh a\lambda + b^4\cos b\lambda)] \quad (50)$$
$$M_0 = 0, \qquad V_0 = 0$$
$$\Delta - = 2a^4b^4(1-\cosh a\cos b) - ab(a^6 - b^6)\sinh a\sin b$$

Cu acestea problema este deci complet rezolvată.

Observația 2:

Studiul făcut în această parte a proiectului pune în evidență numeroase aspecte de care trebuie să se țină seama într-un caz practic. Bara B-E este totuşi o ecuație simplificată a vibrațiilor barelor, dar care va trebui generalizată, în sensul de a ține seama şi de alte condiții (forțe tăietoare, forțe de inerție, mase ataşate, etc.). de aceste lucruri se vor ține seama în cele ce urmează.

5.VIBRAȚIILE BARELOR TIMOŞENKO CONȚINÂND MASE CONCENTRATE

Ecuațiile de mişcare (vibrații de încovoiere) ale unei bare drepte, Timoşenko uniforme, conținând un număr de n mase concentrate sunt:

$$\frac{\partial T}{\partial x}-\left[\rho A+\sum_{i=1}^{n} m_i\sigma(x-x_i)\right]\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0 \tag{51}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}=T-\rho I\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{52}$$

$$M=-EI\,\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{53}$$

$$T=kAG\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\psi\right) \tag{54}$$

unde m_i este masa acționând în punctul de abscisă $x_i \in (0,l)$ iar $\sigma(x)$ este distribuția lui Dirac.

Eliminând M şi T din ecuațiile (51-54), obținem:

$$EI\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+kAG\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\psi\right)-\rho I\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}=0 \tag{55}$$

$$kAG\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\partial^{2\psi}}{\partial x^2}\right)-\left[\rho A+\sum_{i=1}^{n} m_i\sigma(x-x_i)\right]\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0 \tag{56}$$

Aplicăm metoda separării variabilelor pentru ecuațiile (55) şi (56) presupunând:

$$y(x,t) = X_1(x)e^{ipt};\ \Psi(x,t) = X_2(x)e^{ipt},\ i = \sqrt{-1} \tag{57}$$

Folosind notațiile:

$$a_0^2=\frac{\rho p^2}{KG};b_0^2=\frac{\rho A p^2}{EI};c_0^2=\frac{\rho p^2}{E} \tag{58}$$

şi aplicând transformata Laplace ecuațiilor astfel obținute deducem:

$$X_1(x)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\Bigg\{\left(\beta^2\cosh\alpha x+\alpha^2\cos\beta x\right)X_1(0)+\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\sinh\alpha x+\frac{\alpha^2}{\beta}\sin\beta x\right)X_1(0)+$$
$$(\cosh\alpha x-\cos\beta x)X_1^{II}(0)+\left(\frac{1}{\alpha}\sinh\alpha x-\frac{1}{\beta}\sin\beta x\right)X_1^{III}(0)+b^2\sum_{i=1}^{n}M_iX_1(x_i)$$
$$\left[\frac{1}{\alpha}\sinh\alpha(x-x_i)-\frac{1}{\beta}\sin\beta(x-x_i)\right]H(x-x_i)-a^2\sum_{i=1}^{n}M_iX_1(x_i)\left[\frac{\alpha^2-c^2}{\alpha}\sinh\alpha(x-x_i)-\right.$$
$$\left.\frac{\beta^2-c^2}{\beta}\sin\beta(x-x_i)\right]H(x-x_i)\Bigg\}$$

$$X_2(x)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left\{\left(\beta^2\cosh\alpha x+\alpha^2\cos\beta x\right)X_2(0)+\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\sinh\alpha x+\frac{\alpha^2}{\beta}\sin\beta x\right)X_2^I(0)+\right.$$

$$+(\cosh\alpha x-\cos\beta x)X_2^{II}(0)+\left(\frac{1}{\alpha}\sinh\alpha x-\frac{1}{\beta}\sin\beta x\right)X_2^{III}(0)+(b^2-a^2c^2)\sum_{i=1}^{n}M_iX_2(x_i)$$

$$\left[\frac{1}{\alpha}\sinh\alpha(x-x_i)-\frac{1}{\beta}\sin\beta(x-x_i)\right]H(x-x_i)-a_0^2\sum_{i=1}^{n}M_iX_2^{II}(x_i)\left[\frac{1}{\alpha}\sinh\alpha(x-x_i)-\right.$$

$$\left.\frac{1}{\beta}\sin\beta(x-x_i)\right]H(x-x_i)+b_0^2\left[\sum_{i=1}^{n}M_iX_1(x_i)(\cosh\alpha(x-x_i)-\cos\beta(x-x_i)-\right.$$

$$\left.\left.-\cos\beta(x-x_i))-\sum_{i=1}^{n}M_iX_1^I(x_i)\left[\frac{1}{\alpha}\sinh\alpha(x-x_i)-\frac{1}{\beta}\sin\beta(x-x_i)\right]H(x-x_i)\right\}\qquad(59)$$

unde

$$2\alpha^2=-a_0^2-c_0^2+\sqrt{4b_0^2+(a_0^2-c_0^2)^2};2\beta^2=a_0^2+c_0^2+\sqrt{4b_0^2+(a_0^2-c_0^2)^2}$$

$$M_i=\frac{m_i}{\rho A}\qquad(60)$$

iar H(x) este distribuția lui Heaviside.

Între coeficienții $X_k(0), X_k^I(0), X_k^{II}(0), X_k^{III}(0), k=1,2$, există relațiile:

$$X_2(0)=\frac{(a_0^4+b_0^2)X_1^I(0)+a^2X_1^{III}(0)}{b_0^2-a_0^2c_0^2};X_2^I(0)=a_0^2X_1(0)+X_1^{II}(0)$$

$$X_2^{II}(0)=a_0^2X_1^I(0)+X_1^{III}(0);x_2^{III}(0)=(b_0^2-a_0^2c_0^2)X_1(0)-c_0^2X_1^{II}(0)\qquad(61)$$

În acest paragraf, vom considera condițiile la limită pentru bara în consolă care sunt:

$$X_1(0)=X_2(0)=0;X_1^I(l)=X_2(l);X_2^I(l)=0\qquad(62)$$

Relațiile (61) devin:

$$X_1^{III}(00=-\frac{a_0^4+b_0^2}{a_0^2}X_1^I(0);X_2^{II}(0)=-\frac{b_0^2}{a_0^2}X_1^I(0);X_2^{III}(0)=-c_0^2X_1^{II}(0);\ X_2^I(0)=X_1^{II}(0)\qquad(63)$$

Soluțiile (59) sunt în acest caz:

$$X_1(x)=\sum_{i=1}^{n}U_{1i}(x)X_1(x_i)+\sum_{i=1}^{n}U_{2i}(x)X_1^I(x_i)+\sum_{i=1}^{n}U_{3i}(x)X_2(x_i)+\sum_{i=1}^{n}U_{4i}(x)X_2^{II}(x_i)\qquad(64)$$

$$X_2(x)=\sum_{i=1}^{n}V_{1i}(x)X_1(x_i)+\sum_{i=1}^{n}V_{2i}(x)X_1^I(x_i)+\sum_{i=1}^{n}V_{3i}(x)X_2(x_i)+\sum_{i=1}^{n}V_{4i}(x)X_2^{II}(x_i)\qquad(65)$$

unde:

$$U_{1i}(x)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left\{C_{1i}\left(\frac{\beta^2a_0^2-a_0^4-b_0^2}{\alpha a_0^2}\sinh\alpha x+\frac{\alpha^2a_0^2+a_0^4+b_0^2}{\beta a_0^2}\sin\beta x\right)+\right.$$

$$+K_{1i}(\cosh\alpha x-\cos\beta x)+M_i\left[\frac{b_0^2-a_0^2\alpha^2-a_0^2c_0^2}{\alpha}\sinh\alpha(x-x_i)+\right.$$

$$\left.+\frac{a_0^2c_0^2-a_0^2\beta^2-b_0^2}{\beta}\sin\beta(x-x_i)\right]H(x-x_i)\qquad(66)$$

$$U_{2i}(x)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left\{C_{1i}\left(\frac{\beta^2a_0^2-a_0^4-b_0^2}{\alpha a_0^2}\sinh\alpha x+\frac{\alpha^2a_0^2+a_0^4+b_0^2}{\beta a_0^2}\sin\beta x\right)+\right.$$

$$+K_{2i}(\cosh\alpha x-\cos\beta x)\qquad(67)$$

$$V_{1i}(x)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left\{\frac{b_0^2}{a_0^2}(\cos\beta x-\cosh\alpha x)C_{1i}+\left(\frac{\beta^2-c_0^2}{\alpha}\sinh\alpha x+\frac{\alpha^2+c_0^2}{\beta}\sin\beta x\right)K_{1i}+\right.$$

$$+b^2M_i\left[\cosh\alpha(x-x_i)-\cos\beta(x-x_i)\right]H(x-x_0) \qquad (68)$$

$$V_{2i}(x)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left\{\frac{b_0^2}{a_0^2}(\cos\beta x-\cosh\alpha x)C_{2i}+\left(\frac{\beta^2-c_0^2}{\alpha}\sinh\alpha x+\frac{\alpha^2+c_0^2}{\beta}\sin\beta x\right)K_{2i}\right\} \qquad (69)$$

Aplicând derivatele în sensul distribuțiilor în (14) şi (15) şi punând condiția de existență a soluțiilor $X_1(x_i), X_1^I(x_i), X_2(x_i)$ şi $X_2^{II}(x_i)$ netriviale, obtinem ecuația pulsațiilor proprii sub forma:

$$\det\begin{pmatrix} U_{1i}(x_j)-\delta_{0j} & U_{2i}(x_j) & U_{3i}(x_j) & U_{4i}(x_j) \\ U_{1i}^I(x_j) & U_{2i}^I(x_j)-\delta_{0j} & U_{3i}^I(x_j) & U_{4i}^I(x_j) \\ V_{1i}(x_j) & V_{2i}(x_j) & V_{3i}(x_j)-\delta_{0j} & V_{4i}(x_j) \\ V_{1i}^{II}(x_j) & V_{2i}^{II}(x_j) & V_{3i}^{II}(x_j) & V_{4i}^{II}(x_j)-\delta_{0j} \end{pmatrix} \qquad (70)$$

Considerăm ca exemplu numeric bara de profil „I” cu următoarele caracteristici: E = $2{,}1\cdot10^6$ $\left[\frac{N}{cm^2}\right]$, $G=\frac{3}{8}E$, $\rho=7{,}8\cdot10^{-3}\left[\frac{kg}{cm^3}\right]$, A = 30[$cm^2$];

I = 625[cm^2]; $k=\frac{1}{4{,}4}$, l = 200[cm]. Pentru i=n=1, m=1,3,5 [kg], primele două pulsații sunt prezentate în tabelele 1 şi 2.

X_1	m_1		
	1	3	5
50	65.77	66.00	66.15
100	65.82	65.94	66.10
150	65.84	65.88	65.98

Tabelul 1: pulsația fundamentală p_1

X_1	m_1		
	1	3	5
50	386,27	336,02	315,12
100	361,35	321,73	310,82
150	381,82	356,74	312,14

Tabelul 2: pulsația p_2

Observația 3:

Din ecuația (70) se pot obține şi celelalte pulsații. În literatura de specialitate, sunt puține cazuri când se ține seama de deformația de forfecare, inerția de rotație şi mase concentrate, dar studiul făcut este incomplet (ecuațiile lui Love), fie studiul este făcut cu metode aproximative (Rayleigh, Galerkin) sau prin metode experimentale. Soluțiile date în acest paragraf sunt obținute pentru două ecuații diferențiale complete; se stabilesc relații între constantele care apar; condițiile la limită sunt omogene.

6. VIBRAȚIILE BARELOR TIMOŞENKO. EFECTUL MASELOR CONCENTRATE ŞI A INERȚIEI DE ROTAȚIE A ACESTORA

Față de paragraful precedent, vom ține seama în plus şi de inerția de rotație a maselor concentrate. Ecuațiile vibrațiilor de încovoiere ale unei bare finite, omogene conținând masele concentrate m_i de momente de inerție j_i, sunt:

$$\frac{\partial T}{\partial x} - \left[\rho A + \sum_{i=1}^{n} m_i \delta(x - x_i)\right]\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{71}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = T - \left[\rho I + \sum_{i=1}^{n} j_i \delta(x - x_i)\right]\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \tag{72}$$

$$M = -EI\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{73}$$

$$T = kAg\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi\right) \tag{74}$$

Eliminând funcțiile M şi T între ecuațiile (71-74), obținem:

$$EI\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + kAG\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi\right) - \left[\rho I + \sum_{i=1}^{n} j_i \delta(x - x_i)\right]\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \tag{75}$$

$$kAG\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \left[\rho A + \sum_{i=1}^{n} m_i \delta(x - x_i)\right]\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{76}$$

Pentru ecuațiile (75) şi (76), aplicăm metoda separării variabilelor, presupunând:

$$y(x,t) = X_1(x)e^{ipt}; \psi(x,t) = X_2(x)e^{ipt}, i = \sqrt{-1} \tag{77}$$

Cu notațiile din paragraful 5 şi în plus $J_i = \dfrac{j_i}{\rho I}$, relațiile (75) şi (76) devin:

$$a_0^2 X_2^{II} + \left(a_0^2 c_0^2 - b_0^2\right)X_2 + a_0^2 c_0^2\left[\sum_{i=1}^{n} J_i \delta(x - x_i)\right]X_2 + b_0^2 X_1^{I} = 0 \tag{78}$$

$$X_1^{II} + a_0^2 X_1 + a_0^2\left[\sum_{i=1}^{n} M_i \delta(x - x_i)\right]X_1 + X_2^{I} = 0 \tag{79}$$

Prin derivare în sensul distribuțiilor şi eliminând X_1 din (78) şi (79), obținem două ecuații diferențiale în X_1 şi X_2:

$$\begin{aligned} &X_1^{(IV)}(x) + (a_0^2 + c_0^2)X_1^{II}(x) + (a_0^2 c_0^2 - b_0^2)X_1(x) + \\ &+ (a_0^2 c_0^2 - b_0^2)\sum_{i=1}^{n} M_i \delta(x - x_i)X_1(x) + a_0^2 \sum_{i=1}^{n} M_i [\delta(x - x_i)X_1(x)]^{II} + \\ &+ c_0^2 \sum_{i=1}^{n} J_i [\delta(x - x_i)X_2(x)]^{I} = 0 \end{aligned} \tag{80}$$

$$\begin{aligned} &X_2^{(IV)}(x) + (a_0^2 + c_0^2)X_2^{II}(x) + (a_0^2 c_0^2 - b_0^2)X_2(x) + \\ &+ c_0^2 \sum_{i=1}^{n} J_i [\delta(x - x_i)X_2(x)]^{I} + a_0^2 c_0^2 \sum_{i=1}^{n} J_i \delta(x - x_i)X_2(x) - \\ &- b_0^2 \sum_{i=1}^{n} M_i [\delta(x - x_i)X_2(x)]^{I} = 0 \end{aligned} \tag{81}$$

Aplicând transformata Laplace ecuațiilor (80) şi (81), obținem două ecuații algebrice din care prin aplicarea transformatei Laplace inverse, avem:

$$X_1(x) = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}\{(\beta^2 \cosh \alpha x + \alpha^2 \cos \beta x) + (\frac{\beta^2}{\alpha}\sinh \beta x +$$

$$+\frac{\alpha^2}{\beta}\sin\beta x)X_1^I(0)+(\cosh\alpha x-\cos\beta x)X_1^{II}(0)+(\frac{1}{\alpha}\sinh\alpha x-$$

$$-\frac{1}{\beta}\sin\beta x)X_1^{III}(0)+b_0^2\sum_{i=1}^{n}M_i[\frac{1}{\alpha}\sinh\alpha(x-x_i)-$$

$$-\frac{1}{\beta}\sin\beta(x-x_i)]X_1(x_i)H(x-x_i)-a_0^2\sum_{i=1}^{n}M_i\left[\frac{\alpha^2+c_0^2}{\alpha}\sinh\alpha(x-x_i)+\right.$$

$$+\frac{\beta^2-c_0^2}{\beta}\sin\beta(x-x_i)]X_1(x_i)H(x-x_i)-c_0^2\sum_{i=1}^{n}J_i[\cosh\alpha(x-x_i)-$$

$$-\cos\beta(x-x_i)]X_2(x_i)H(x-x_i)\} \tag{82}$$

$$X_2(x)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\{(\beta^2\cosh\alpha x+\alpha^2\cos\beta x)X_2(0)+(\frac{\beta^2}{\alpha}\sinh\alpha x+$$

$$+\frac{\alpha^2}{\beta}\sin\beta x)X_2^I(0)+(\cosh\alpha x-\cos\beta x)X_2^{II}(0)+(\frac{1}{\alpha}\sinh\alpha x-$$

$$-\frac{1}{\beta}\sin\beta x)X_2^{III}(0)-c_0^2\sum_{i=1}^{n}J_i[\alpha\sinh\alpha(x-x_i)+$$

$$+\beta\sin\beta(x-x_i)]X_2(x_i)H(x-x_i)-a_0^2c_0^2\sum_{i=1}^{n}J_i\left[\frac{1}{\alpha}\sinh\alpha(x-x_i)-\right.$$

$$-\frac{1}{\beta}\sin\beta(x-x_i)]X_2(x_i)H(x-x_i)-b_0^2\sum_{i=1}^{n}M_i[\cosh\alpha(x-x_i)-$$

$$-\cos\beta(x-x_i)]X_1(x_i)H(x-x_i)\} \tag{83}$$

Relațiile (60) şi (61) rămân şi în acest paragraf, valabile.
Pentru bara în consolă, condițiile la limită sunt:

$$X_1(0)=X_2^I(0)=0;\, X_1^I(l)=X_2(l);\, X_2^I(l)=0 \tag{84}$$

Pentru acest tip de bară, din condițiile (84), obținem:

$$X_1^I(0)=\sum_{i=1}^{n}C_{1i}X_1(x_i)+\sum_{i=1}^{n}C_{2i}X_2(x_i) \tag{85}$$

$$X_1^{II}(0)=\sum_{i=1}^{n}K_{1i}X_1(x_i)+\sum_{i=1}^{n}K_{2i}X_2(x_i) \tag{86}$$

unde

$$C_{1i}=\frac{a_0^2}{\Delta}M_i[b_0^2(\cosh\alpha x_i+\cos\beta x_i)+(a_0^2+c_0^2)^2\cos\beta l\cosh\alpha(l-x_i)+$$

$$+(\beta^2-c_0^2)^2\cosh\alpha l\cos\beta(l-x_i)+b_0^2\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta l\sinh\alpha(l-x_i)-$$

$$-b_0^2\frac{\beta}{\alpha}\sinh\alpha l\sin\beta(l-x_i)] \tag{87}$$

$$+\frac{\alpha^2+c^2}{a}\left[\sinh\alpha l\cos\beta(l-x_i)-\cos\beta l\sinh\alpha(l-x_i)\right)+$$
$$+\frac{a_0{}^2+\alpha^2}{\beta}\left[\sin\beta(l-x_i)\cosh\alpha l-\sin\beta L\cosh\alpha(l-x_i)\right)\ \} \tag{88}$$

$$K_{1i}=\frac{b_0^{\;2}}{\Delta}M_i\left[\alpha\left(\alpha^2+c_0^{\;2}\right)\sinh\alpha x_i+\beta\left(\alpha^2+a_0^{\;2}\right)\sin\beta x_i+\right.$$
$$+\beta\left(\alpha^2+c_0^{\;2}\right)\sin\beta l\cosh\alpha\left(l-x_i\right)+\alpha\left(\beta^2-c_0^{\;2}\right)\sinh\alpha l\cos\beta\left(l-x_i\right)-$$
$$\left.-\beta\left(\beta^2-a_0^{\;2}\right)\cosh\alpha\sin\beta\left(l-x_0\right)-\alpha\left(\alpha^2+a_0^{\;2}\right)\cos\beta l\sinh\alpha\left(m-x_i\right)\right] \qquad (89)$$

$$K_{2i}=\frac{c_0^{\;2}}{\Delta}J_i\left[b_0^{\;2}\cosh\alpha x_i+b_0^{\;2}\cos\beta x_i-\frac{\beta}{\alpha}b_0^{\;2}\sin\beta l\sinh\alpha\left(l-x_i\right)+\right.$$
$$+b_0^{\;2}\frac{\alpha}{\beta}\sinh\alpha l\sin\beta\left(l-x_i\right)+\left(a_0^{\;2}+\alpha^2\right)^2\cos\beta l\cosh\alpha\left(l-x_i\right)+$$
$$\left.+\left(\beta^2-a_0^{\;2}\right)\cosh\alpha l\cos\beta\left(l-x_i\right)\ \right] \qquad (90)$$

$$\Delta=2b^2-\frac{b_0^{\;2}\left(a_0^{\;2}+c_0^{\;2}\right)}{\sqrt{b_0^{\;2}-a_0^{\;2}c_0^{\;2}}}\sinh\alpha l\sin\beta l+\left[2b_0^{\;2}+\left(a_0^{\;2}-c_0^{\;2}\right)^2\right]\cosh\alpha l\cos\beta l \qquad (91)$$

Soluțiile 82 şi 83, cu ajutorul relațiilor 85, 86 şi 63, devin:

$$X_1(x)=\sum_{i-1}^{n}\ X(x_i)U_{1i}^{\;*}(x)\sum_{i-1}^{n}\ X_2X(x_i)U_{2i}^{\;*}(x)$$
$$X_2(x)=\sum_{i-1}^{n}\ X(x_i)V_{1i}^{\;*}(x)\sum_{i-1}^{n}\ X_2X(x_i)V_{2i}^{\;*}(x) \qquad (92)$$

unde

$$U_{1i}^{\;*}=U_{1i};\quad U_{2i}^{\;*}=U_{2i}-c_0^{\;2}J_i\left[\cosh\alpha\left(x-x_o\right)-\cos\beta\left(x-x_o\right)\right]H\left(x-x_o\right) \qquad (93)$$

$$V_{1i}^{\;*}=V_{1i}$$

$$V_{2i}^{\;*}=V_{2i}-c_0^{\;2}J_i\left[\frac{\alpha^2+a_0^{\;2}}{a_0}\sin\alpha\left(x-x_0\right)+\frac{\beta^2-\alpha_0^{\;2}}{\beta}\sin\beta\left(x-x_0\right)\right]H\left(x-x_0\right) \qquad (94)$$

iar $U_{1i},U_{2i},V_{1i},V_{2i}$ sunt date de formulele(76 şi 77)

Pentru $x = x_J (j=\overline{1,n})$ în (92) şi (93) şi pentru soluții nebanale $X_1(x_i)$ şi $X_2(x_i)$, determinantul coeficienților trebuie să fie nul, ceea ce conduce la ecuația pulsațiilor proprii:

$$\det\begin{pmatrix} U_{1i}(x_j)-\delta_{ij}U_{2i}(x_j) \\ V_{1i}(x_j)V_{2i}(x_j)-\delta_{ij} \end{pmatrix}=0,ij=\overline{1,n} \qquad (95)$$

unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker.

Pentru alte tipuri de bare, procedura este asemănătoare. Condiția de ortagonalitate pentru modurile normale este de forma

$$\int_0^1\left\{X_{1p}(x)X_{1q}(x)\left[\rho A+\sum_{i^I 1}^{n}m_i\delta\left(x-x_i\right)\ \right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\rho A}{EI}X_{2p}(x)X_{2q}(x)\left[\rho l+\sum_{i^I 1}^{n}J_i\delta\left(x-x_i\right)\right]\ \right\}dx=0,\ p\neq q \qquad (96)$$

Cu $X_1\{x\}$ şi $X_2\{x\}$ cunoscute, deflecția totală, unghiul de încovoiere, momentele şi forțele pot fi determinate.

Ca exemplu numeric, considerăm bara de profil "I" de la paragrafele anterioare, în plus j_i =*2m\cm*. Primele două pulsaţii pentru diferite valori ale distanţelor x_i şi ale maselor m_t, sunt prezentate în tabelele 3 şi 4.

		m_i				
x_i	1	3	5	7	9	11
50	374,412	367,401	360,494	351,715	347,120	339,481
80	370,123	357,302	345,821	339,824	322,215	308,519
100	368,481	354,202	340,770	336,512	318,240	300,111
130	374,301	365,914	358,164	341,713	345,713	331,249
150	373,502	364,991	360,179	348,813	350,732	341,821
180	375,612	371,817	369,821	359,822	359,177	349,817

Tabelul 3: pulsaţia p_1

			m_i			
x_i	1	3	5	7	9	11
50	377,995	378,072	378,150	378,211	378,306	378,512
80	378,059	378,512	378,513	378,425	378,889	379,312
100	378,119	378,448	378,779	378,994	379,449	380,130
130	378,042	378,411	378,611	378,912	379,088	380,001
150	379,141	378,341	378,619	378,991	379,991	379,891
1801	381,114	387,111	391,167	395,179	403,111	414,114

Tabelul 4: pulsaţia p_2

Pentru alte legături ale barei, modul de tratare este analog celui prezentat mai sus, condiţiile la limită (62)schimbându - se corespunzător. Din ecuaţia (95)se pot obţine şi celelalte pulsaţii.

7. APLICAREA METODEI INTERATIV - VARIAŢIONALE ÎN STUDIUL VIBRAŢIILOR BARELOR TIMOŞENKO CONŢINÂND MASE ADIŢIONALE

Pentru ecuaţiile (61-64) de la paragraful 5 vom aplica metoda interativ - variaţională. Această metodă este recent folosită în literatura de specialitate pentru determinarea pulsaţiilor barelor Timoşenko. Această metodă este rapid convergentă iar multiplicatorii lui Lagrange sunt determinaţi optimal cu ajutorul teoriei variaţionale.

În general metoda iterativ - variaţională se poate aplica oricărui sistem diferenţial neliniar de forma:

$$L(u)+N(u)=g(x) \tag{97}$$

unde L este un operator liniar iar N un operator neliniar. Pentru sistemul (97) propunem soluţia iterativă în forma:

$$u_{n+1}(x)=u_n(x)+\int_0^x \lambda\left[L(u_n(s))+N(\tilde{u}_n(s))-g(s)\right]ds \tag{98}$$

unde λ, este un multiplator Lagrange care poate fi identificat optimal via teoria variaţională, $\tilde{u}_n$ este considerat ca restricţie astfel ca

$\delta\tilde{u}^{(k)}{}_n = 0(k = 1,2,....)$ (aici δu semnifică variația lui u iar $u^{(k)} = \frac{d^k u}{dx^k}$)

Metoda iterativ - variațională este efectivă, simplă, de mare precizie şi se aplică unei clase largi de probleme neliniare cu aproximații rapid convergente la soluția exactă. Pentru probleme liniare, soluția exactă poate fi obținută numai după o singură iterație, deoarece multiplicatorul lui Lagrange poate fi exact identificat.

Cu notațiile (58) ecuațiile (55) şi (56) se scriu sub forma:

$$a_0{}^2 X_2{}^{II} + \left(a_0{}^2 c_0{}^2 - b_0{}^2\right) X_2 + b^2 X_1{}^I = 0 \tag{99}$$

$$X_1{}^{II} + a_0{}^2 X_1 + a_0{}^2 \sum_{i=1}^{n} M_i \delta(x - x_i) X_1 - X_2{}^I = 0 \tag{100}$$

Vom aplica tehnica propusă pentru a rezolva ecuațiile (99) şi (100). Pentru aceasta vom scrie cele două ecuații în forma iterativă:

$$X_{1,n+1}(x) = X_{1,n}(x) + \int_0^x \lambda_1 \left[X_{1,n}{}^{II}(s) + a_0{}^2 X_{1,n}(s) - X_{2,n}(s) + a_0{}^2 \sum_{i=1}^{n} M_i \delta(x - x_i) X_{1,n}(s) \right] ds \tag{101}$$

$$X_{2,n+1}(x) = X_{2,n}(x) + \int_0^x \lambda_2 \left[a_0{}^2 X_{2,n}{}^{II}(s) + \left(a_0{}^2 c_0{}^2 - b_0{}^2\right) X_{2,n}(s) + b_0{}^2 X_{1,n}{}^I(s) \right] ds \tag{102}$$

Notăm că variațiile inițiale sunt nule: $\delta X_{1,n}(o) = \delta X_{2,n}(o) = O$ şi ținând seama de relația:

$$\begin{aligned} \delta \int_0^x F\left(s, y, y^I, y^{II}\right) ds &= \left(Fy^I - \frac{d}{ds} Fy^{II} \right) \delta y + Fy^I \delta y^I + \delta y ds + \\ &+ \int_0^x \left(Fy - \frac{d}{ds} Fy^I + \frac{d}{ds^2} Fy^{II} \right) \delta y ds \end{aligned} \tag{103}$$

au loc următoarele condiții de staționaritate

$$\delta x_{1,n+l} = (1 - \lambda_1{}^I)\, \delta X_{1,n} + \lambda_1 \delta X^I{}_{1,n} + \int_o^x \left(a_0{}^2 \lambda_1 + \lambda^{II}{}_1\right) \delta X_{1,n} ds = 0 \tag{104}$$

$$\delta X_{2,n+1} = \left(1 - a_0{}^2 \lambda^I{}_2\right) \delta X_{2,n} + a_0{}^2 \lambda_2 \delta X^I{}_{2,n} + \int_0^x \left[\left(a_0{}^2 c_0{}^2 - b_0{}^2\right) \lambda_2 + a_0{}^2 \lambda_2{}^{II} \right] \delta X_{2,n} ds = 0 \tag{105}$$

Pentru multiplicatorii lui Lagrange λ_1, şi λ_2 au loc deci, condițiile:

$$\left(1 - \lambda^I{}_1\right)\Big|_{s=x} = 0; \lambda_1\Big|_{s=x} = 0; a_0{}^2 \lambda_1 + \lambda_1{}^{II} = 0 \tag{106}$$

$$\left(1 - a_0{}^2 \lambda_2{}^I\right)\Big|_{s=x} = 0; \lambda_2\Big|_{s=x} = 0; \left(a_0{}^2 c_0{}^2 - b_0{}^2\right) \lambda_2 + a_0{}^2 \lambda_2{}^{II} = 0 \tag{107}$$

Pentru cazurile reale, cum am amintit in paragrafele precedente,

$b_0 > a_0 c_0$ si deci su notatia , $h^2 = \frac{b_0{}^2 - a_0{}^2 c_0{}^2}{a_0{}^2}$, obtinem multiplicatorii lui Lagrange:

$$\lambda_1(s,x) \frac{1}{a_0} \sin a_0(s - x); \quad \lambda_2(s,x) = \frac{1}{h a_0{}^2} Shh(s - x) \tag{108}$$

folosind identitatiile:

$$\begin{aligned} &\int_0^x \left[X_{1,n}{}^{II}(s) + a_0{}^2 X_{1,n}(s) \right] \sin a_0 (s - x) dx = \\ &= X_{1,n}{}^I(0) \sin a_0 x - a_0 X_{1,n}(x) + a_0 X_{1,n}(0) \cos a_0 x \end{aligned} \tag{109}$$

$$\int_0^x \left[X_{2,n}{}^{II}(s) - h^2 X_{2,n}(s) \right] shh(s - x) dx = X_{2,n}{}^I(0) shhx - hX_{2,n}(x) + hX_{2,n}(0) chhx \tag{110}$$

ecuatiile 51 şi 52 pot fi scrise sub forma:

$$X_{1,n+1}(x)=\frac{1}{a_0}\sin a_0x\left[X_{1,n}{}^{I}(0)-X_{2,n}(0)\right]+X_{1,n}(0)\cos a_0x+ \tag{111}$$

$$+\int_0^x X_{2,n}(s)\cos a_0(s-x)dx-a_0\sum_{i=1}^{n}M_iX_{1,n}(x_i)\sin a_0(x-x_i)H(x-x_i)$$

unde H este distribuția lui Heaviside.

Pentru bara in consolă se ştiu condițiile la limită:

$$X_1(0)=X_2(0)=0;\quad X_1(l)=X_2(l)=0;\quad X_2{}^{I}(l)=0 \tag{112}$$

astfel că putem alege iterațiile inițiale sub forma:

$$X_{1,0}(s)=A(chhs-\cos a_0s);\quad X_{2,0}=B(shas-\sin a_0s); \tag{113}$$

Cu A şi B constante care urmeză sa fie determinate. Înlocuind (113) in (111) şi (112) obținem:

$$x_{1,1}(0)=0;\ x_{2,1}(0)=0;\ x_{1,1}{}^{I}(0)=0;\ x_{2,1}{}^{I}(0)=(h+a_0)B-\frac{b_0{}^2}{2a_0{}^2}A \tag{114}$$

Obținem in acest fel, aproximația de ordinul trei, sub forma:

$$X_{1,2}(x)=\frac{b_0{}^2}{a_0{}^2}A\left[\frac{x(hshhx-a_0\sin a_0x)}{2(h^2+a_0{}^2)}+\frac{a_0{}^2-3h^2}{2(h^2+a_0{}^2)^2}(chhx-\cos a_0x)\right]+$$

$$+\frac{h+h_0}{h^2+a_0{}^2}B(chhx-\cos a_0x)-a_0B\sum_{i=1}^{n}M_i\left[\frac{h(chhx_i-\cos a_0x_i)}{h^2+a_0{}^2}+\right. \tag{115}$$

$$\left.+\frac{x_i}{2}\sin a_0x_i\quad\right]\sin a_0(x-x_i)H(x-x_i)$$

$$X_{2,2}(x)=B\left[\frac{h}{h^2+a_0{}^2}\left(\frac{xchhx}{2}-\frac{a_0\sin a_0x+hshhx}{h^2+a_0{}^2}\right)+\frac{(a_0{}^2-h^2)\sin a_0x}{(h^2+a_0{}^2)^2}-\frac{a_0x\cos a_0x}{h^2+a_0{}^2}\right]+$$

$$+\left(\frac{h+a_0}{h}B-\frac{b_0{}^2A}{2ha_0{}^2}\right)\sinh x+\frac{b_0{}^2}{a_0(h^2+a_0{}^2)}A\sum_{i=1}^{n}M_i(hhx_i-\cos a_0x_i)[a_0\cos a_0(x-x_i)+ \tag{116}$$

$$+a_0chhx\cos a_0x_i+hshhx\sin a_0x_i\quad]$$

Din condțiile $X_{1,2}{}^{I}(l)=X_{2,2}(l)$ şi $X_{2,2}{}^{I}(l)=0$, obținem un sistem de doua ecuații algebrice liniare şi omogene cu doua necunoscute. Pentru soluții netriviale în A şi B, determinantul coeficenților trebuie să se anuleze, astfel că obținem urmatoarea ecuație a pulsațiilor proprii:

$$\{h(h^2+a_0)[l(h^2chhl-a_0{}^2\cos a_0l)+hshhl-a_0\sin a_0]+h(a_0{}^2-3h^2)(hshhl+a_0\sin a_0l)+$$

$$+(h^2+a_0{}^2)shhl-2h(h^2+a_0{}^2)\sum_{i^I1}^{n}M_i(chhx_i-\cos a_0x_i)[a_0\cos a_0(l-x_i)+a_0chhl\cos a_0x_i+$$

$$+hshhl\sin ax_i\quad]H(x-x_i)\ \}[2(h+a_0)(h^2+a_0{}^2)^2chhl+(h^2+a_0{}^2)(hchhl-2a_0\cos a_0l+$$

$$+h^2lshal+2a_0{}^2l\sin a_0l\quad)+a_0(a_0{}^2-a_0h-h^2)\cos a_0l-a_0h^2chl\ ]+(h^2+a_0{}^2)\{(h^2+a_0{}^2)chhl+$$

$$+2\sum_{i^I1}^{n}M_i(chhx_i-\cos a_0x_i)[a_0{}^2\cos a_0(l-x_i)-a_0hshhl\cos a_0x_i-h^2chxl\sin a_0x_i\ ]\ \}\{2h(h+$$

$$+a_0\quad)(h^2+a_0{}^2)(hshhl+a_0\sin a_0l)-2(h+a_0)(h^2+a_0{}^2)^2shhl-h^2[l(h^2+a_0{}^2)chhl-2a_0\sin a_0l-2hshhl-$$

$$-2h(a_0{}^2-h^2)\sin a_0l+2ha_0l(h^2+a_0{}^2)\cos a_0l+ha_0{}^2(h^2+a_0{}^2)\sum_{i=1}^{n}M_i[h\cos a_0x_i- \tag{117}$$

$$-hchhx_i-x_i(h^2+a_0{}^2)\sin a_0x_i\ ]\ \}=0$$

Ecuația (117) a fost rezolvată cu ajutorul programului MATHCAD cu aceleaşi date numerice de la paragraful 7. Rezultatele sunt trecute în tabelele 5 şi 6.

X_i		m_i	
	1	3	5
50	66,03	65,97	66,11
125	66,04	66,15	66,27
175	66,11	66,19	66,21

Tabelul 5: pulsația p_1 din ecuația (118)

X_i		m_i	
	1	3	5
50	399,57	343,43	321,14
125	366,29	326,71	314,29
175	387,14	361,65	333,15

Tabelul 6: pulsația p_2 din ecuația (118)

8. CONCLUZII

În acest proiect ne-am propus să araătăm că pulsțiile proprii ale barelor de tip Bernoulli-Euler nu coincid în cazul barelor de tip “I”, “T”, “U”, “O” etc cu cele ale barelor de tip Timoşenko. În mod eronat, în unele lucrări ştiințifice de specialitate se afirmă că primele pulsații pentru cele două tipuri de bare sunt apropiate ca valoare. În practică se propune numai studiul vibrațiilor barelor de tip Bernoulli-Euler, ceea ce conduce la rezultate care nu sunt conforme cu realiatea. Acest lucru este pus în evidență în cazul construcțiilor înalte, a podurilor, a turnurilor, etc.

În toate cazurile, obiectivele propuse în acest priect au fost îndeplinite îmbinând cercetările teoretice cu cele experimentale care s-au finalizat în cadrul laboratoarelor de Mecanică şi Vibrații de la Facultatea de Mecanică.

Finalizarea acestui proiect s-a facut după un mare volum de muncă. Au fost necesare cunoştințe de mecanică, rezistența materialelor, teoria elasticității, matematică şi informatică. Au fost angrenați de-a lungul timpului un mare număr de cercetători.

Rezultatele au fost fost făcute cunoscute la diferite manifestări ştiințifice în țară dar şi în Rusia, Israel, Olanda, Germania, Anglia, SUA, Serbia şi India precum şi în diferite reviste de specialitate.

Rezultatele obținute vor fi generalizate şi extinse îndeosebi la numeroasele fenomene neliniare care apor inerent în studiul vibrațiilor. Unele rezultate au fost publicate în diferite reviste de prestigiu de specialitate. Altele vor fi finalizate în perspectivă şi vor face obiectul unui viitor contract de cercetare.

BIBLIOGRAFIE

1. V. MARINCA, N.HERIŞANU - *Approximate Method For Free Vibration Analysis of a Timoshenko Beam Using Cubic Spline Functions* - International Journal of Acoustic and Vibration - Vol.4 Nr.2 (1999) pp.73-78
2. V. MARINCA, N.HERIŞANU - *Use of cubic spline functions for analysis of free vibrations of elastically restrained non-uniform Timoshenko beams* - Proceed.of the Seven Int.Congress on Sound and Vibration, Garmisch - Partenkirchen, Germania (2000)
3. V. MARINCA,- *Free vibrations analysis of an ascially loaded Timoshenko beam with the approximate method of the cubic spline functions* - Conf. IX^{a} Vibr.mec, Timişoara (1999) pp 237-243
4. V. MARINCA, B. MARINCA - *The non-linear bending vibrations of a Bernoulli - Euler* -Conf.Ix^{a} Vibr.mec., Timişoara (1999) pp 231-236
5. V. MARINCA, N.HERIŞANU, B. MARINCA, - *A new approximate analytical technique for non-linear systems* - analele Fac.Ing.Hunedoara (2000)

6. V. MARINCA, N.HERIŞANU - *The effect of shear deformation, of rotary inertia and of a compressie axial force on the frequency of a uniform beam* - XVI Yugoslav Conf. *Voise and Vibration*, Niş (1998)
7. V. MARINCA - *The exact solution in the case of certain non-linear Cauchy problem - Analysis and Num.Comp. of Sol. Of Non-Linear System* -Univ.de Vest Timişoara, Aerospace Research and develop.of US Air Force (1997) pp 332 - 343
8. V. MARINCA, N.HERIŞANU - *Natural frequencies of a restrained cantilever beam carrying a heavy tip body* - Fourth Int. Congress on Sound and Vibration, St.Petersburg, Russia (1996) pp 1935 - 40, vol.3
9. V. MARINCA, N.HERIŞANU - *The exact solution of the free vibrations of stepped bernoulli-Euler beams and with a tip mass* - Fourth Int.Congress on Sound and Vibration, St.Petersburg, Russia (1996) pp 1941-44, vol.3
10. H.Matsuda, C.Morita, T.Sokiyama - *A method for vibration analysis of a tapered Timoshenko beam with constraint at any points and carrying a heavy tip body* + J.of Sound and Vibration, 158 (1992) pp 331 – 39
11. V. MARINCA: „The exact solution in the case of certain nonlinear Cauchy problem" – Proceed. Of the Int. Conf. Univ. Vest Timişoara (1997), pp. 332-341
12. V. MARINCA, N. HERISANU: „The influence of compressive axial loads on the natural frequencies of Timoshenko type beams", The 26th Israel Conf. on Mech. Eng. Conf. Proceed. Haifa (1996), pp. 611-613
13. V. MARINCA, N. HERISANU, B. MARINCA: „Transverse vibration of a cantilever beam with end mass subject to harmonic base excitation" – Proceed Xth Conf. on Mech. Vibr. Tom 47 (61) Timişoara (2002), pp. 91-96
14. V. MARINCA, B. MARINCA, N. HERISANU: „On the response of the second mode of a cantilever beam" - Facta Universitatis, Vol. 3, N. 12, Niş Yugoslavia (2002), pp.457-463
15. V. MARINCA, B. MARINCA, N. HERISANU: „On the response of the second mode of a cantilever beam" - Facta Universitatis, Vol. 3, N. 12, Niş Yugoslavia (2002), pp.457-463
16. V. MARINCA:" Applicatio of Modified Homotopy Perturbation Method to Nonlinear Oscillations" (va apare – 2006)
17. V. MARINCA, N. HERIŞANU: „A modified Iteration Perturbation Method for some non-linear problems" (va apare – 2006)
18. V. MARINCA, N. HERIŞANU: „The oscillator with cubic elastic restoring force", Int. Conf. „Noise and Vibration" – Niş (Serbia), I.D. 19-30 (2004)
19. V. MARINCA, N. HERIŞANU: „On the generalized Van der Pol equation" – Analelr Univ. „A. Vlaicu", Arad p. 218-220 (2004)
20. V. MARINCA, N. HERIŞANU: „Periodic solution of the forced Duffing oscillator with the modified homotopy perturbatin method" (va apare – 2005)